Sistemas Newtonianos - Métodos Numéricos

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Cristián Jauregui , Felipe Toledo

August 25, 2013

1 Resumen teórico

1.1 Discretización temporal

Para poder representar una función $x(t)$ en un computador, se aprovecha la propiedad de que muchas de las magnitudes físicas son continuas con respecto al tiempo. Luego:

$$\text{Si } t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar una función $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$ se discretiza el tiempo usando un espaciado Δt, de modo que:

$$t_i = T_A + i\Delta t, \text{ con } i = 0, 1, 2, ...$$

1.2 Derivadas discretas

$$\dot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad \text{(Primera derivada hacia adelante)}$$
$$\dot{x}(t_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad \text{(Primera derivada hacia atrás)}$$
$$\dot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad \text{(Primera derivada centrada)}$$
$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad \text{(Segunda derivada centrada)}$$

1.3 Intersección con algún valor

Dada una función $x(t)$ debidamente discretizada a partir de N intervalos de tiempo. Tal función toma el valor x^* en el intervalo i si:

$$(x_i - x^*)(x_{i+1} - x^*) < 0$$

Luego, el tiempo en que alcanza el valor x^* puede ser aproximado por:

$$t^* \approx t_i$$
$$t^* \approx t_{i+1}$$
$$t^* \approx \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$$

1.4 Algoritmo de Verlet

Se utiliza para encontrar la posición en función del tiempo de una partícula sometida a una fuerza dependiente de su posición y/o velocidad. $F = F(x, \dot{x}) = F(x.v)$.

(a) Dados x_0 y v_0.

(b) Calcular x_1 asumiendo que la aceleración es nula, es decir:

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

(c) Iterar desde $i = 1$ en adelante utilizando la fórmula:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \frac{(\Delta t)^2}{m} F(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t})$$

2 Problemas

P1. Un paracaidista salta desde una altura $H = 1000\ m$ con velocidad vertical inicial nula. Considerando al conjunto paracaidista - paracaídas como una masa puntual ($m = 120\ kg$) y asumiendo que sufre los efectos de la fuerza de gravedad y el roce viscoso ($\vec{F}_{Roce} = -\gamma \vec{v}$ con $\gamma = 40 \frac{kg}{s}$).

  (a) Calcule numéricamente la velocidad con que llega al suelo.

  (b) Haga un gráfico de velocidad versus tiempo y estime el tiempo que tarda el paracaidista en alcanzar la velocidad terminal.

P2. Se desea saber cómo disminuye en el tiempo la energía mecánica de un cuerpo que cae en presencia de roce turbulento $F_{Roce} = -\gamma |v| v$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x. Para eso, considere que se suelta un cuerpo de masa m desde una altura H y se sigue su evolución hasta que golpea el suelo.

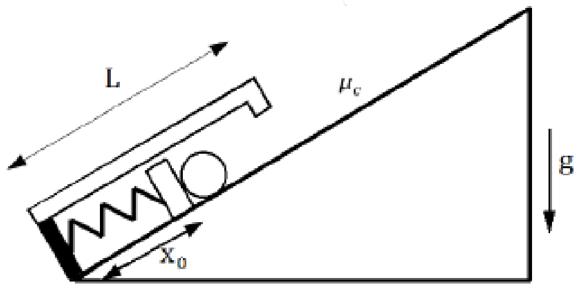
  (a) Escriba la ecuación de movimiento del cuerpo.

  (b) A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permita calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por $\triangle t$.

  (c) Escriba una expresión discreta para la energía mecánica del cuerpo, que use las posiciones discretas encontradas en el punto anterior.

P3. Desde una altura H del nivel del piso, se lanza un proyectil con velocidad v_0 formando un ángulo α con la horizontal. Considere en todo momento despreciable el roce del proyectil con el aire. Escriba un algoritmo que permita determinar el alcance del proyectil para los valores $v_0 = 10\ [m/s]$, $H = 2\ [m]$, $g = 9.8\ [m/s^2]$, y $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

P4. Considere el montaje de la figura. El ángulo de la cuña con respecto a la horizontal es θ y el resorte no sobrepasa la longitud L (a diferencia de la partícula). La posición inicial de la masa (m) es x_0 con una velocidad inicial $-v_0$ (paralelo a la superficie de la cuña), existe roce cinético de constante de roce μ_c, el largo natural del resorte es L y su constante elástica es k. Calcule numéricamente la trayectoria de la partícula.



P5. Un péndulo con roce se describe por la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} sin(\phi) - \gamma\dot{\phi}$$

Donde L es el largo del péndulo y γ el coeficiente de roce.
Como el sistema tiene roce, si el péndulo se suelta desde el reposo desde un ángulo inicial ϕ_0, los ángulos máximos de alcance (indicados por un círculo en la figura) serán cada vez menores.
Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener cómo van disminuyendo estos ángulos máximos. Para eso:

(a) A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permita calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por $\triangle t$.

(b) Escriba un criterio numérico que permita determinar los instantes en que el péndulo alcanza los ángulos máximos y los valores de estos ángulos.