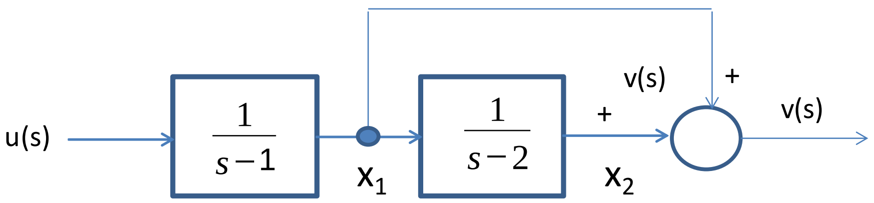
Pregunta 1:

1) Se tiene el siguiente sistema físico:



Donde las variables de estado "físicas" corresponden a [x_1, x_2] mostradas en la figura. Para este problema se pide:

a) Encuentre las ecuaciones de estado del sistema físico de la forma $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \quad v = C\underline{x} + Du$. Identifique las matrices A,B,C,D. (10 puntos)

$$u(s)\frac{1}{s-1} = x_1 \rightarrow \dot{x}_1 = u(t) + x_1$$
$$x_1\frac{1}{s-2} = x_2 \rightarrow \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$$
$$v(t) = x_1 + x_2$$

Las ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$v = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Desde estas ecuaciones es muy simple obtener las matrices A,B,C,D.(D es una matriz nula)

b) Utilizando la forma canónica de control plantee un esquema de realimentación de estados de la forma $u = -K\underline{x}$ para obtener polos de lazo cerrado en -10 ± j10. Asegúrese que el vector $\underline{x}$ corresponde a las variables físicas. Efectúe un diagrama del sistema de realimentación propuesto. (25 puntos)

Como A es una matriz banda, los valores propios se encuentran en λ=1,2. La controlabilidad del sistema se encuentra analizando el determinante de la siguiente matriz:

$$Cont = [B\ AB] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

El determinante es igual a dos y el sistema es controlable. La ecuación característica del sistema en su forma actual es:

$$(s-1)(s-2) = s^2 - 3s + 2$$

Por lo tanto las matrices A_c, B_c de la forma canónica de control son:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{c1}\\ \dot{x}_{c2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

La relación entre los estados de la forma canónica de control y los estados físicos es:

$[x_c] = T[x]$ el valor de T se calcula utilizando $T = [Cont_c][Cont]^{-1}$. La matriz $Cont_c$ es:

$$Cont_c = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ y\ T = [Cont_c][Cont]^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

La ecuación característica a la que se requiere llegar, utilizando realimentación de estados, es:

$$(s+10+j10)(s+10-j10)=s^2+20s+200$$

Considerando realimentación de estados y la forma canónica de control:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{c1}\\ \dot{x}_{c2}\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & -200\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}$$

$$3-k_1=-20\rightarrow k_1=23$$

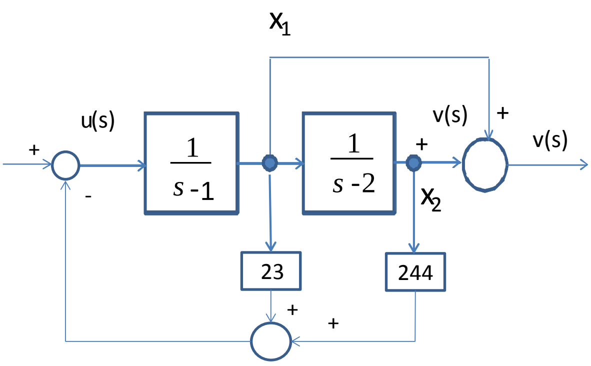
$$-2-k_2=-200\rightarrow k_2=198$$

la realimentación de estados físicos se obtiene considerando que $[x_c]=T[x]$ Por lo tanto se tiene:

$$\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}[T]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Donde $\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}[T]=\begin{bmatrix}23 & 198\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 244\end{bmatrix}$

El diagrama de realimentación propuesto sería (entre otras posibilidades):



c) Se requiere control integral de la salida v(s) para seguir con cero error en estado estacionario una señal $r^*(s)$. Explique las modificaciones necesarias a las matrices de a) y establezca cuáles son las nuevas matrices *A*, *B* y *C* necesarias. ¿Es el sistema controlable ahora?

Si se requiere control integral se debe añadir un término que integre el error. Esto es:

$$x_3=\int(v-r^*)dt\rightarrow\int([C][x]-r^*)dt$$

El control integral significa que un estado mas que represente la dinámica de x_3 debe agregarse:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r^*$$

$$v=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Existe una diferencia entre u(t) y $r^*(t)$. La referencia es generalmente una señal externa (perturbación) y el vector u(t) se obtiene utilizando realimentación de estados. La controlabilidad del sistema se analiza considerando:

$$Cont = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es 3, por lo tanto el sistema es controlable en todos sus estados.