

Factores de Frecuencia e Intervalos de Confianza

Profesor: James McPhee T.
Auxiliar: Sebastián Fernández M.

1. Introducción:

La presente guía pretende ser un resumen de la aplicabilidad del método del factor de frecuencia, planteado por Chow, para determinar eventos asociados a cierta probabilidad de excedencia (periodo de retorno).

2. Factores de Frecuencia

El cálculo de diversas magnitudes para periodos de retorno específicos requiere que la función de distribución de probabilidad sea invertible (calcular x_T dado un valor para T). Sin embargo, no todas las funciones son fácilmente invertibles, por ejemplo, las distribuciones Normal y Pearson Tipo III.

No obstante, es posible expresar una magnitud x_T , de la siguiente forma:

$$x_T = \mu + \Delta x_T$$

Es decir, como el valor de la media más una desviación respecto a la media. Dicha desviación se puede escribir como el producto entre la desviación estándar σ y el factor de frecuencia K_T , o sea:

$$x_T = \mu + K_T \sigma$$

Lo cual, para una muestra de datos, puede aproximarse por:

$$x_T = \bar{x} + K_T s_x$$

A continuación, veremos algunos métodos para obtener los valores de K_T para distintas distribuciones de probabilidades.

2.1. Distribución Normal:

$$K_T = z$$

$$w = [\text{Ln}(1/p^2)]^{1/2}$$

Si $p > 0,5$ usar $1-p$

$1/T$

$$z = w - \frac{2,515517 + 0,802853w + 0,010328w^2}{1 + 1,432788w + 0,1889269w^2 + 0,001308w^3}$$

Distribución Log Normal es idéntica a lo anterior, pero en vez de trabajar con los promedios y desviación de la serie, se trabaja con el promedio y desviación de los logaritmos de la serie.

2.2. Distribución de Valor Extremo Tipo I (Gumbel):

$$K_T \equiv -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left(0,5772 + \text{Ln} \left[\text{Ln} \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \right)$$

En caso de poca extensión de registro, se hace una corrección por el número de años mediante la variable reducida:

$$Y = -\text{Ln} \left[\text{Ln} \left(\frac{T}{T-1} \right) \right]$$

n	y _n	σ _n		n	y _n	σ _n
10	0.4952	0.9496		60	0.5521	1.1747
15	0.5128	1.0206		65	0.5535	1.1803
20	0.5236	1.0628		70	0.5548	1.1854
25	0.5309	1.0914		75	0.5559	1.1898
30	0.5362	1.1124		80	0.5569	1.1938
35	0.5403	1.1285		85	0.5578	1.1974
40	0.5436	1.1413		90	0.5586	1.2007
45	0.5463	1.1518		95	0.5593	1.2037
50	0.5485	1.1607		100	0.5600	1.2065
55	0.5504	1.1682				

$$x_T \equiv \bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sigma_n} (y - \bar{y}_n)$$

2.3. Distribución Pearson III y Log Pearson:

Se calcula el coeficiente de asimetría (G o Cs):

$$C_s = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^3}{N \cdot \sigma^3}$$

Si $-1 \leq G \leq 1$

$$K_T = \frac{2}{G} \left(\left[\left(K_T^N - \frac{G}{6} \right) \frac{G}{6} + 1 \right]^3 - 1 \right)$$

K de variable normal estandarizada

Los valores del factor de frecuencia para esta distribución se encuentran ya tabulados de acuerdo a las Figuras 1 y 2.

TABLA 12.3.1
Valores de K_T para la distribución Pearson Tipo III (asimetría positiva)

Coeficiente de asimetría C_s o C_w	Periodo de retorno en años						
	2	5	10	25	50	100	200
	Probabilidad de excedencia						
	0.50	0.20	0.10	0.04	0.02	0.01	0.005
3.0	-0.396	0.420	1.180	2.278	3.152	4.051	4.970
2.9	-0.390	0.440	1.195	2.277	3.134	4.013	4.909
2.8	-0.384	0.460	1.210	2.275	3.114	3.973	4.847
2.7	-0.376	0.479	1.224	2.272	3.093	3.932	4.783
2.6	-0.368	0.499	1.238	2.267	3.071	3.889	4.718
2.5	-0.360	0.518	1.250	2.262	3.048	3.845	4.652
2.4	-0.351	0.537	1.262	2.256	3.023	3.800	4.584
2.3	-0.341	0.555	1.274	2.248	2.997	3.753	4.515
2.2	-0.330	0.574	1.284	2.240	2.970	3.705	4.444
2.1	-0.319	0.592	1.294	2.230	2.942	3.656	4.372
2.0	-0.307	0.609	1.302	2.219	2.912	3.605	4.298
1.9	-0.294	0.627	1.310	2.207	2.881	3.553	4.223
1.8	-0.282	0.643	1.318	2.193	2.848	3.499	4.147
1.7	-0.268	0.660	1.324	2.179	2.815	3.444	4.069
1.6	-0.254	0.675	1.329	2.163	2.780	3.388	3.990
1.5	-0.240	0.690	1.333	2.146	2.743	3.330	3.910
1.4	-0.225	0.705	1.337	2.128	2.706	3.271	3.828
1.3	-0.210	0.719	1.339	2.108	2.666	3.211	3.745
1.2	-0.195	0.732	1.340	2.087	2.626	3.149	3.661
1.1	-0.180	0.745	1.341	2.066	2.585	3.087	3.575
1.0	-0.164	0.758	1.340	2.043	2.542	3.022	3.489
0.9	-0.148	0.769	1.339	2.018	2.498	2.957	3.401
0.8	-0.132	0.780	1.336	1.993	2.453	2.891	3.312
0.7	-0.116	0.790	1.333	1.967	2.407	2.824	3.223
0.6	-0.099	0.800	1.328	1.939	2.359	2.755	3.132
0.5	-0.083	0.808	1.323	1.910	2.311	2.686	3.041
0.4	-0.066	0.816	1.317	1.880	2.261	2.615	2.949
0.3	-0.050	0.824	1.309	1.849	2.211	2.544	2.856
0.2	-0.033	0.830	1.301	1.818	2.159	2.472	2.763
0.1	-0.017	0.836	1.292	1.785	2.107	2.400	2.670
0.0	0	0.842	1.282	1.751	2.054	2.326	2.576

Figura 1: Valores de coeficiente de Frecuencia distribución Pearson III con asimetría positiva

TABLA 12.3.1 (cont.)
Valores de K_T para la distribución Pearson Tipo III (asimetría negativa)

Coeficiente de asimetría C_s o C_w	Periodo de retorno en años						
	2	5	10	25	50	100	200
	Probabilidad de excedencia						
	0.50	0.20	0.10	0.04	0.02	0.01	0.005
-0.1	0.017	0.846	1.270	1.716	2.000	2.252	2.482
-0.2	0.033	0.850	1.258	1.680	1.945	2.178	2.388
-0.3	0.050	0.853	1.245	1.643	1.890	2.104	2.294
-0.4	0.066	0.855	1.231	1.606	1.834	2.029	2.201
-0.5	0.083	0.856	1.216	1.567	1.777	1.955	2.108
-0.6	0.099	0.857	1.200	1.528	1.720	1.880	2.016
-0.7	0.116	0.857	1.183	1.488	1.663	1.806	1.926
-0.8	0.132	0.856	1.166	1.448	1.606	1.733	1.837
-0.9	0.148	0.854	1.147	1.407	1.549	1.660	1.749
-1.0	0.164	0.852	1.128	1.366	1.492	1.588	1.664
-1.1	0.180	0.848	1.107	1.324	1.435	1.518	1.581
-1.2	0.195	0.844	1.086	1.282	1.379	1.449	1.501
-1.3	0.210	0.838	1.064	1.240	1.324	1.383	1.424
-1.4	0.225	0.832	1.041	1.198	1.270	1.318	1.351
-1.5	0.240	0.825	1.018	1.157	1.217	1.256	1.282
-1.6	0.254	0.817	0.994	1.116	1.166	1.197	1.216
-1.7	0.268	0.808	0.970	1.075	1.116	1.140	1.155
-1.8	0.282	0.799	0.945	1.035	1.069	1.087	1.097
-1.9	0.294	0.788	0.920	0.996	1.023	1.037	1.044
-2.0	0.307	0.777	0.895	0.959	0.980	0.990	0.995
-2.1	0.319	0.765	0.869	0.923	0.939	0.946	0.949
-2.2	0.330	0.752	0.844	0.888	0.900	0.905	0.907
-2.3	0.341	0.739	0.819	0.855	0.864	0.867	0.869
-2.4	0.351	0.725	0.795	0.823	0.830	0.832	0.833
-2.5	0.360	0.711	0.771	0.793	0.798	0.799	0.800
-2.6	0.368	0.696	0.747	0.764	0.768	0.769	0.769
-2.7	0.376	0.681	0.724	0.738	0.740	0.740	0.741
-2.8	0.384	0.666	0.702	0.712	0.714	0.714	0.714
-2.9	0.390	0.651	0.681	0.683	0.689	0.690	0.690
-3.0	0.396	0.636	0.666	0.666	0.666	0.667	0.667

Fuente: U. S. Water Resources Council (1981).

Figura 2: Valores de coeficiente de Frecuencia distribución Pearson III con asimetría positiva

Importante:

No olvidar que los criterios de selección de mejor distribución de frecuencias no solo son estadísticos en base por ejemplo al test χ^2 , sino que además debe verificarse gráficamente la posible sobre-estimación o sub-estimación de las distribuciones a los valores observados.

3. Intervalos de Confianza

En Hidrología no basta solo con entregar el valor de un evento asociado a un periodo de retorno, pues existen diversas causas de incertidumbres que hacen necesaria la existencia de intervalos de confianza de esta estimación. Para estimar estadísticamente estos intervalos se adoptan distintas metodologías dependiendo de las fdp.

3.1. Valor aproximado distribución Normal:

$$Var(x_T) = S_e^2 = \frac{S_x^2}{n} \left(1 + \frac{K_T^2}{2}\right)$$

Se considera que el intervalo de confianza se calcula como:

$$X^{sup,inf} = X_T \pm S_e^2 \cdot \sigma_x$$

Considerando que la muestra es representativa de la población:

$$\sigma_x \approx S_x$$

3.2. Valor aproximado distribución Gumbel:

$$S_e = \left[\frac{1}{n} (1 + 1,1396K_T + 1,1K_T^2) \right]^{1/2} S_x$$

3.3. Valor aproximado distribución Pearson y Log Pearson III

$$\begin{aligned}
 K_{T,\alpha}^A &= \frac{K_T + \sqrt{K_T^2 - ab}}{a} & \left| \begin{aligned} a &= 1 - \frac{z_{1-\alpha}^2}{2(n-1)} \\ b &= K_T^2 - \frac{z_{1-\alpha}^2}{n} \end{aligned} \right. \\
 K_{T,\alpha}^B &= \frac{K_T - \sqrt{K_T^2 - ab}}{a}
 \end{aligned}$$

Nivel de Confianza $\beta=1-2\alpha$
--

Ejemplo de uso:

Con un nivel de confianza de 90% ($\alpha=5\%$), busco en la Tabla de la distribución Normal (Figura 3), qué valor de z acumulado, tiene asociado un $0.95 = (1 - \alpha)$ de probabilidad de acumulada, encontrándose un valor intermedio de $z_\alpha=1.645$.

Notar que según Chow, estaríamos considerando para las dos primeras funciones de distribución de probabilidad el error estándar de una predicción, mientras que en las últimas se utiliza derechamente los límites de confianza.

TABLA 11.2.1
Probabilidad acumulada de la distribución normal estándar

<i>z</i>	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Fuente: Grant, E. L., y R. S. Leavenworth. *Statistical Quality and Control*, tabla A, p. 643, McGraw-Hill, New York, 1972. Utilizada con autorización.

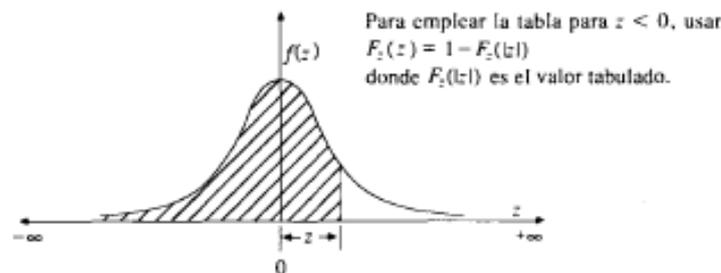


Figura 3: Tabla de la distribución Normal

4. Referencias

- Chow V, Maidment D. y Mays L, 1994, “Hidrología Aplicada”, editorial McGraw-Hill.
- Vargas Ximena y James McPhee, Apuntes de cátedra CI41C/CI5101, FCFM, Departamento de Ingeniería Civil, División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Universidad de Chile.

Dudas/consultas: sefernan@ing.uchile.cl