# ANALISIS DIMENSIONAL

*Referencia: Mecánicas de Fluidos I,*
*Horacio Mery M.,*
*Departamento de Ingeniería Civil,*
*U. de Chile*
*1987.*

El análisis dimensional es un método de análisis que parte de la premisa que debe existir una relación dimensionalmente homogénea entre las variables involucradas en la descripción de un fenómeno físico.

El método presenta ventajas y desventajas:

Ventajas:

- Permite abordar problemas complejos
- Requiere de información mínima
- Simplifica la investigación, reduciendo la experimentación

Desventajas:

- Entrega una solución incompleta del problema en estudio
- No se gana un conocimiento respecto al mecanismo del fenómeno estudiado

Para describir cualquier fenómeno físico, necesitamos referirnos a ciertos *conceptos o entidades físicas,* tales como fuerza, masa, velocidad, aceleración, tiempo, temperatura, etc. *Para cada una de estas entidades físicas se ha aceptado una unidad de medida*.

## Unidades fundamentales y unidades derivadas

Hay *ciertas entidades físicas que son independientes entre sí* y sus unidades han sido aceptadas por acuerdos internacionales. Ellas corresponden a las *unidades fundamentales*. Ejemplos de ellas son longitud (L), masa (M), tiempo (T), carga eléctrica ($Q_e$), temperatura ($\Theta$), etc.

Las unidades fundamentales determinan las unidades de otras entidades físicas llamadas *unidades derivadas*, por ejemplo, velocidad, aceleración fuerza, energía, etc.

La selección de las unidades fundamentales es arbitraria. De este modo, podemos elegir como unidad fundamental masa o fuerza indistintamente, pero las unidades derivadas variarán, dependiendo de cual haya sido la unidad fundamental elegida. Por ejemplo, energía tendrá unidades de (masa) $\times$ (longitud / tiempo)$^2$, o de (fuerza) $\times$ (longitud), dependiendo de la elección hecha.

**Dimensión:** Código que nos indica cómo varía el valor numérico de una cierta entidad derivada, cuando conocemos la variación de las unidades fundamentales.

Una *magnitud física tiene dos componentes*. La *unidad de medida* y la *magnitud o cuantía*, que es la relación entre el valor de la magnitud y la unidad de medida elegida.

En general hay confusión con el término dimensión. A veces se emplea indistintamente para designar las entidades [M], [L], [T],... (verdadera acepción) y otras veces se usa para expresar la magnitud o cuantía.

Las unidades derivadas se expresan como relaciones monomias de las unidades fundamentales. Es así como la velocidad tiene dimensiones de $[L][T]^{-1}$, la aceleración de $[L][T]^{-2}$, etc.

Si tenemos r unidades fundamentales $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$, entonces, las unidades derivadas se expresarán como $[D] = [x_1]^a\ [x_2]^b\ \ldots[x_r]^r$ . Por ejemplo, si elegimos [M], [L] y [T] como unidades fundamentales, la unidad de energía será $[E] = [M][L]^2\ [T]^{-2}$.

## TEOREMA P O DE BUCKINGHAM

El número de parámetros adimensionales que pueden ser empleados para describir un fenómeno conocido entre n variables es igual a (n-r), siendo r el número de dimensiones fundamentales que comprometen las variables del fenómeno.

En otras palabras: Si una cierta variable $a_1$ de un fenómeno físico depende de otras (n-1) a través de la relación funcional

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

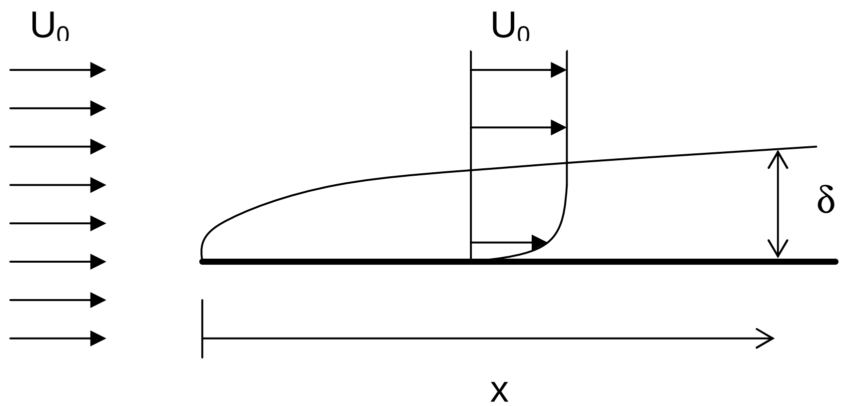
donde $[a_i] = [x_1]^a\ [x_2]^b\ \ldots[x_r]^r$, i = 1, 2, ..., n, con al menos un exponente distinto de cero, entonces este fenómeno puede expresarse en términos de una relación funcional que contiene (n-r) parámetros adimensionales

$$\phi(\pi_1, \pi_1, \ldots, \pi_{n-r}) = 0$$

donde $[\pi_i] = 1$, i = 1, ..., (n-r).

**Ejemplo**

Determinar el espesor de una capa límite laminar sobre una placa plana.




*De la física del problema*, se ve que las variables involucradas en el fenómeno del crecimiento de la capa límite laminar son: el espesor de la capa límite ($\delta$), la distancia desde el comienzo de la placa (x), la velocidad del flujo sin perturbar ($U_0$ ) y la viscosidad del fluido ($\nu$). (Notar que si no sabemos la física del fenómeno, no es mucho lo que podemos avanzar en el análisis. Las razones por qué las cuatro variables antes mencionadas son relevantes en el análisis son relevantes en el problema se explica en clases).

Las dimensiones de las variable son: $[\delta] = L$ , $[x] = L$ , $[U_0] = LT^{-1}$ , $[\nu] = L^2T^{-1}$

Existe solamente dos variables independientes: L y T. Luego, el número de parámetros adimensionales es (n-r) = (4-2) = 2.

Elijamos una *base* de r = 2 elementos : e = (x, $U_0$)

Formemos los parámetros adimensionales:

$\pi_1 = x^a \, U_0^b \, \delta^c$

$[\pi_1] = [L]^a \, [LT^{-1}]^b [L]^c = 1$

De donde resulta que tanto los exponentes de L como de T deben ser nulos, o sea:

Exponentes de L: $a+b+c = 0$

Exponentes de T: $-b = 0$

Luego, b = 0 y a = -c. Tomemos en forma arbitraria c = 1, de donde a = -1. De este modo, el primer adimensional encontrado es $\pi_1 = \delta/x$ .

Para el cálculo de $\pi_2$ procedemos de igual forma:

$\pi_2 = x^a\, U_0^b\, \nu^c$

$[\pi_2] = [L]^a\, [LT^{-1}]^b [L^2T^{-1}]^c = 1$

Exponentes de L: $a+b+2c = 0$

Exponentes de T: $-b-c = 0$, de donde $c = -b$.

Tomando arbitrariamente $b = 1$, resulta $c = -1$ y $a = 1$.

De este modo, el segundo número adimensional es $\pi_2 = x\, U_0/\nu$.

Luego, a partir de la función de *cuatro variables con dimensiones* $f(x, U_0, \delta, \nu) = 0$, hemos podido formar una nueva función de sólo *dos variables adimensionales* $\phi(\pi_1, \pi_2) = 0$.

El resultado es $\phi\left(\frac{\delta}{x}, \frac{xU_0}{\nu}\right) = 0$ , de donde podemos despejar la variable de interés, $\delta$ :

$$\frac{\delta}{x} = \phi_1(\mathrm{Re}_x)$$

Más no podemos avanzar con análisis dimensional. Para poder determinar $\phi_1$ debemos recurrir a la experimentación. Pero la experimentación ahora se ha simplificado enormemente, pues sólo tenemos que preocuparnos de dos variables: $\pi_1$ y $\pi_2$ , en lugar de las cuatro originales ($x$, $U_0$, $\nu$ y $\delta$).

Recordar que Blasius obtuvo analíticamente: $\frac{d}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ .

**En resumen:**

La metodología para determinar los números adimensionales es la siguiente:

- Conocer bien la física del fenómeno
- Determinar el número de variables involucradas (n)
- Seleccionar las variables básicas (r ), o base repetitiva (las dimensiones de las variables básicas deben ser independientes)
- Formar (n-r) parámetros adimensionales, de tal manera que cada uno de ellos involucre una combinación de las variables básicas