Auxiliar 10: Teoría de Grafos

Matemáticas Discretas
Profesores: Pablo Barceló & Gonzalo Navarro
Auxiliares: Antonio Lizama & Miguel Romero
20 de noviembre de 2013

P1. En un salón se encuentran 15 mujeres y cierta cantidad de hombres. Cada hombre saluda exactamente a 6 mujeres, y cada mujer saluda a exactamente 8 hombres. ¿Cuántos hombres hay en el salón?

P2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo con al menos 2 nodos. Demuestre que existe un nodo $v \in V$ tal que si se saca v de G (junto con los arcos incidentes a él) el grafo sigue siendo conexo.

P3. Sea n un entero par mayor o igual a 4. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices y estrictamente más de $n^2/4$ aristas. Demuestre que G contiene un triángulo; esto es, existen 3 vértices a, b, c en G tal que $ab,\ bc,\ ac \in E$.

P4. Recuerde que el número cromático de un grafo simple G, denotado por $\chi(G)$, es el menor número de colores que se necesita para colerar G.

Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples. Denotamos $G \otimes H$ al grafo simple que tiene como conjunto de vértices $V \times V'$, y tal que para $u, v \in V$ y $u', v' \in V'$ se tiene que existe un arco en $G \otimes H$ entre los vértices (u, u') y (v, v') si y sólo si $(1) u = v$ y $(u', v') \in E'$ ó $(2) u' = u$ y $(u, v) \in E$.

Demuestre que para cualquier grafo simple G y H, se cumple que:

$$\chi(G \otimes H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}.$$