

Auxiliar 8 - MA3801 - Análisis
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile
Martes 07 de Mayo, 2013

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.
Profesores Auxiliares: Francisco Arana - Matías Godoy Campbell - Ignacio Vergara S.

Pregunta 3. Un espacio métrico (X, d) se dirá **ultramétrico** si la distancia d satisface la siguiente desigualdad:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$$

a) Pruebe que si $d(x, y) \neq d(y, z)$ entonces $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$.

Solución: Supongamos sin pérdida de generalidad que:

$$d(x, y) > d(y, z) \Rightarrow \max\{d(x, y), d(y, z)\} = d(x, y)$$

así, por desigualdad ultramétrica es gratis que:

$$d(x, z) \leq d(x, y)$$

para la otra, por desigualdad ultramétrica notemos que se tiene:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$$

pero notemos que es imposible que el resultado de este máximo sea $d(y, z)$, pues en tal caso:

$$d(x, y) \leq d(y, z)$$

lo que contradice nuestra suposición $d(x, y) > d(y, z)$ (en el caso opuesto se tiene una contradicción análoga), luego:

$$\max\{d(x, z), d(y, z)\} = d(x, z)$$

luego:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\} = d(x, z)$$

y se concluye.

b) Pruebe que en un espacio ultramétrico, todo punto de una bola (abierta o cerrada) es el centro de esa bola, es decir: $\forall b \in B(a, r)$ se tiene $B(b, r) = B(a, r)$.

Solución: Sea pues $b \in B(a, r)$. Probemos que $B(b, r) = B(a, r)$.

Para ello primero notemos que basta probar una inclusión, pues como $b \in B(a, r)$ se tiene $d(b, a) < r$ que es equivalente a que $a \in B(b, r)$ y por tanto se tendría la otra inclusión de forma análoga.

Así pues, probemos que $B(b, r) \subseteq B(a, r)$:

En efecto, sea $z \in B(b, r)$, luego $d(z, b) < r$, notemos que por desigualdad ultramétrica:

$$d(z, a) \leq \max\{\underbrace{d(z, b)}_{< r}, \underbrace{d(b, a)}_{< r}\} < r$$

por lo tanto $z \in B(a, r)$ y se concluye la inclusión buscada que permite concluir la igualdad pedida. Finalmente notemos que el caso de las bolas cerradas es análogo a este, cambiando todos los $<$ por $\leq$.

c) Pruebe que en un espacio ultramétrico toda bola abierta (respectivamente cerrada) es abierta y cerrada.

Solución: Veamos primero el caso de la bola abierta, para probar que es cerrada veamos que su complemento:

$$B^c(a, r) = \{x \mid d(x, a) \geq r\}$$

es abierta.

En efecto: Sea $x \in B^c(a, r)$ la idea es buscar $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq B^c(a, r)$.

Dado $z \in B(x, \delta)$ tenemos que $d(z, x) < \delta$, por otro lado gracias a la desigualdad ultramétrica:

$$d(z, a) \leq \max\{\underbrace{d(z, x)}_{< \delta}, \underbrace{d(x, a)}_{\geq r}\}$$

Así, notemos que si $\delta < r$ se tienen dos cosas interesantes:

Por un lado, $\max\{d(z, x), d(x, a)\} = d(x, a) \geq r$. Por otro lado, como $\delta < r$ entonces $d(z, x) \neq d(x, a)$ y gracias a la parte a) entonces $d(z, a) = \max\{d(z, x), d(x, a)\} = d(x, a) \geq r$, de donde se concluye que, si $\delta < r$ entonces:

$$B(x, \delta) \subseteq B^c(a, r)$$

es decir, $B^c(a, r)$ es un abierto.

El hecho que las bolas cerradas $\overline{B}(a, r) = \{x \mid d(x, a) \leq r\}$ sean abiertas es consecuencia directa de la parte b), pues basta notar que, si $b \in \overline{B}(a, r)$ entonces:

$$B(b, r) \subseteq \overline{B}(b, r) = \overline{B}(a, r)$$

de donde se concluye inmediatamente que $\overline{B}(a, r)$ es abierto.

- d) Pruebe que si dos bolas no son disjuntas, entonces una está contenida dentro de la otra.

Solución: Sean $B(x, r)$ y $B(y, R)$ dos bolas no disjuntas, luego existe z tal que $d(x, z) < r$ y $d(y, z) < R$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $R > r$. Probemos que $B(x, r) \subseteq B(y, R)$, en efecto: sea $u \in B(x, r)$, notemos que:

$$d(u, y) \leq \max\{d(u, z), d(z, y)\} \leq \max\{\underbrace{\max\{d(u, x), d(x, z)\}}_{< r}, \underbrace{d(z, y)}_{< R}\} < \max\{r, R\} = R$$

por lo tanto $u \in B(y, R)$ y se concluye.

- e) Pruebe que todo espacio ultramétrico es totalmente desconexo, es decir, que las componentes conexas de estos espacios se reducen a singuletes.

Solución: Supongamos que existe una componente conexa E con al menos dos elementos, la idea es aprovechar que tenemos bolas abiertas que a la vez son cerradas para particionar E en abiertos no vacíos.

Así, dados x e y en E , consideremos $r = d(x, y)$ y tomemos $B = B(x, \frac{r}{2})$.

Notemos en tal caso que $E \cap B$ es un abierto no vacío (en la topología traza) que NO contiene a y , más aun $y \in E \cap B^c$ que también es un abierto no vacío, pues B es cerrado (por parte b)).

Es decir, hemos construido dos abiertos no vacíos tal que su intersección es vacía, luego E no es conexo, lo que es una contradicción.