MA3801 - Análisis. Semestre Otoño 2013
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Francisco Arana, Matías Godoy, Ignacio Vergara

Pauta Pregunta 3 Control 3
Martes 30 de Julio, 2013

P3. *a)* Sea $\ell_n : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$\ell_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 x(t)dt$$

Pruebe que ℓ_n es lineal continuo, $\ell_n(x) \to 0$ para todo $x \in \mathcal{C}[0,1]$, pero $\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \not\to 0$.

Solución: Probemos primero que ℓ_n es lineal: Sean $x, y \in \mathcal{C}[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\ell_n(\lambda x + y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda x + y)\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 (\lambda x + y)(t)dt \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\lambda x\left(\frac{k}{n}\right) + y\left(\frac{k}{n}\right)\right] - \int_0^1 [\lambda x(t) + y(t)]dt \\
&= \lambda \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) - \lambda\int_0^1 x(t)dt + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 y(t)dt \\
&= \lambda\ell_n(x) + \ell_n(y)
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es debido a la linealidad de la suma y la integral. Así, se tiene que ℓ_n es lineal. **(0.5 ptos.)**
Para tener la continuidad basta ver que ℓ_n es acotada, es decir, que existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in \mathcal{C}[0,1]$ se tiene:

$$|\ell_n(x)| \leq M\|x\|_\infty$$

en efecto, notemos que dado $x \in \mathcal{C}[0,1]$ se tiene:

$$|\ell_n(x)| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x\|_\infty\right| + \left|\int_0^1 \|x\|_\infty dt\right| = 2\|x\|_\infty$$

así, encontramos $M = 2$ que satisface lo pedido. Por lo tanto $\ell_n \in (\mathcal{C}[0,1])'$. **(0.5 ptos.)**
Veamos ahora que dado $x \in \mathcal{C}[0,1]$, $\ell_n(x) \to 0$
Para ello basta notar que como x es continua, entonces es Riemann-Integrable, por lo tanto por un lado la integral de x está bien definida, y por otro:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 x(t)dt \text{ cuando } n \to \infty$$

pues la suma corresponde a una Suma de Riemann de una partición equiespaciada del intervalo $[0,1]$ de paso $1/n$, luego se concluye que $\ell_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. **(0.5 ptos.)**

Finalmente veamos que $\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \not\to 0$:
Para ello primero recordemos la definición de la norma dual en este caso:

$$\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} = \sup_{\|x\|_\infty = 1}|\ell_n(x)| = \sup_{\|x\|_\infty = 1}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 x(t)dt\right|$$

Para probar que esta cantidad no converge a 0 cuando $n \to \infty$ lo importante es probar que para cada n existe una función $x^{(n)}$ tal que $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$ pero $|\ell_n(x^{(n)})|$ sea estrictamente mayor que 0 (e independiente de n), de este modo poder tener una cota inferior uniforme para $\|\ell_n\|$ que sea estrictamente mayor a 0, y de ese modo concluir que la norma dual no converge a 0.
Para realizar esto hay variados ejemplos que funcionan, la idea principal se basa en que uno de los dos términos de la norma dual sea 0, y el otro una constante estrictamente mayor que 0. Por ejemplo de la siguiente forma:
Dado n fijo, construyamos $x^{(n)}$ del siguiente modo:
Sea $x^{(n)}$ tal que valga 0 en cada punto de la forma $\dfrac{k}{n}$ para $k = 0, 1, \dots, n$, que valga 1 en los puntos de la forma $\dfrac{k}{2n}$ para $k = 1, 3, \dots, 2n-1$; y que su grafico entre cada par consecutivo de estos puntos (o sea, entre $\dfrac{k}{n}$ y $\dfrac{2k+1}{2n}$) sea una recta. Notar que esta construcción está bien definida y resulta continua, más aun:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{(n)}\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

$$\|x^{(n)}\|_\infty = 1$$

$$\int_0^1 x(t)dt = \text{Área de } n \text{ triangulos de base } \frac{1}{n} \text{ y altura } 1 = n \cdot \frac{1}{2n} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto

$$\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \geq |\ell_n(x^{(n)})| = \frac{1}{2}$$

Como este procedimiento se puede realizar para todo n se concluye que

$$\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \geq \frac{1}{2} \quad \forall n$$

y por lo tanto

$$\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \not\to 0$$

(1.5 ptos.)

Observación: Otras funciones que 'sirven' para este procedimiento son $x^{(n)}(t) = \sin^2(n\pi t)$, $x^{(n)}(t) = |\sin(n\pi t)|$, entre otras.

b) Sea E un e.v.n. y S un s.e.v. denso de E, suponga que $f \in S'$. Sin usar el Teorema de Hahn-Banach, pruebe que existe $g \in E'$, que prolonga a f y tal que $\|f\| = \|g\|$. Pruebe además que esta extensión es única.

Solución: Notemos primero que f al ser lineal continua, es uniformemente continua. En efecto, como $f \in S'$, se tiene que $\forall x \in S$

$$|f(x)| \leq \|f\|_{S'}\|x\|$$

y por linealidad

$$|f(x-y)| \leq \|f\|_{S'}\|x-y\|$$

por lo tanto f es Lipschitz de constante $\|f\|_{S'}$, y luego uniformemente continua (dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|f\|_{S'}}$ si f no es nula (sino la continuidad uniforme es inmediata al ser constante) y con esto se satisface la definición de continuidad uniforme). **(0.5 ptos.)**
Como $f \in S'$ es uniformemente continua, S es denso y $\mathbb{R}$ es completo con la métrica usual, se concluye en virtud del teorema de extensión de funciones uniformemente continuas que existe una única $g : E \to \mathbb{R}$ que extiende a f y que es uniformemente continua en E. **(0.4 ptos.)**
Es importante mencionar que g se define como sigue:

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ \lim_n f(x_n) & \text{si } x \notin S \text{ con } x_n \to x,\ x_n \in S \end{cases}$$

Lo cual está bien definido (tanto en que el límite exista como por el hecho de que el valor no dependa de la sucesión escogida) pues S es denso, $\mathbb{R}$ con su norma usual es completo, y f es uniformemente continua (es **fundamental** la continuidad uniforme, sino la construcción puede no estar bien definida, un ejemplo sencillo de ello es la función $f(x) = 1/x$ al considerar $S = (0, \infty)$ y $E = [0, \infty)$, en este caso es claro que f NO se puede extender de forma continua (menos aun de forma uniformemente continua), aun cuando S es denso en E, el problema es que f NO es uniformemente continua).

Veamos ahora que la extensión resulta ser lineal en E:
En S no hay problema pues $g|_S = f$, para E basta proceder por densidad, en efecto:
Dados $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por densidad existen sucesiones (x_n), (y_n) en S tal que: $x_n \to x$ y $y_n \to y$ y se tiene:

$$g(\lambda x_n + y_n) = f(\lambda x_n + y_n) = \lambda f(x_n) + f(y_n) = \lambda g(x) + g(y)$$

donde la primera igualdad se debe a que $g = f$ en S, la segunda a la linealidad de f en S, la tercera a la definición de g. Así, g es lineal en E. **(0.5 ptos.)**

Veamos ahora que $\|f\|_{S'} = \|g\|_{E'}$:
Simplemente por definición (tomamos el sup en un conjunto más grande) es directo que

$$\|f\|_{S'} \leq \|g\|_{E'}$$

(0.3 ptos.)

Para la otra desigualdad procedemos del siguiente modo:
Notemos que si $x \in S$:

$$|g(x)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

y si $x \notin S$, entonces existe $x_n \to x$ tal que:

$$|g(x)| = |\lim f(x_n)| = \lim |f(x_n)| \leq \lim \|f\|\|x_n\| = \|f\|\|x\|$$

recordando que $\|g\|_{E'}$ es la menor constante tal que

$$|g(x)| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in E$, se concluye que

$$\|g\|_{E'} \leq \|f\|_{S'}$$

y por lo tanto $\|g\|_{E'} = \|f\|_{S'}$. **(0.8 ptos.)**

Finalmente probemos la unicidad de la extensión:
Supongamos que existen g_1, g_2 extensiones lineales continuas de f. Definamos $h = g_1 - g_2$, notemos que, en S se tiene:

$$h(x) = g_1(x) - g_2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pues ambas son extensiones de f. Ahora, si $x \in E \setminus S$ entonces existe x_n sucesión en S tal que $x_n \to x$ que satisface:

$$h(x) = g_1(x) - g_2(x) = \lim_n f(x_n) - f(x_n) = \lim_n 0 = 0$$

y por lo tanto $h \equiv 0$ en E, y luego $g_1 = g_2$. **(0.5 ptos.)**