Auxiliar 14 - MA3801 - Análisis

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Lunes 29 de Julio, 2013

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.

Profesores Auxiliares: Francisco Arana - Matías Godoy Campbell - Ignacio Vergara S.

Pregunta 1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Pruebe los siguientes corolarios del Teorema de Hahn-Banach:

a) Sea $\{x_1, \ldots, x_d\} \subset X$ una familia de vectores linealmente independientes y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $\ell \in X'$ tal que $\ell(x_i) = \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, d$.

b) Sea M un subespacio vectorial cerrado y $x_0 \notin M$. Pruebe que existe $\ell \in X'$ tal que $\ell|_M = 0$, $\ell(x_0) = 1$ y $\|\ell\|_{X'} = \dfrac{1}{d(x_0, M)}$.
Indicación: Considere $p(x) = \dfrac{d(x, M)}{d(x_0, M)}$.

c) Sea X_0 s.e.v. de X tal que $\forall \ell \in X'$ se tiene $\ell|_{X_0} = 0 \Rightarrow \ell = 0$. Pruebe que en tal caso X_0 es denso en X.

Pregunta 2. (Espacios ℓ^p, $1 \leq p < \infty$)
Para todo $p \in [1, \infty]$ denotemos:

$$\ell^p := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p < \infty \right\} \text{ si } 1 \leq p < \infty,\ \ \ell^\infty := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sup_k |u_k| < \infty \right\}$$

y para toda sucesión $u \in \ell^p$, definimos $\|u\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}$ si $1 \leq p < \infty$, y $\|u\|_\infty = \sup_k |u_k|$.

a) Pruebe las siguientes desigualdades:

- (Desigualdad de Young) Dados $a, b > 0$ y $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se tiene:
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
- (Desigualdad de Holder) Dados $u \in \ell^p$ y $v \in \ell^q$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (p y q se dicen Holder conjugados), se tiene:
$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

b) Pruebe que $\|\cdot\|_p$ es norma en ℓ^p para $1 \leq p < \infty$ y que $\|\cdot\|_\infty$ es norma en ℓ^∞.
Indicación: Piense en la mayoración $|a + b|^p \leq (|a| + |b|) \cdot |a + b|^{p-1}$.

c) Considere $e(n)$ la sucesión que consta de ceros salvo un uno en la posición n.
Demuestre que $< \{e(n) : n \in \mathbb{N}\} >$ es denso en en ℓ^p para $p \in [1, \infty)$. Analice el caso ℓ^∞.

d) Pruebe que $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ |x_n| \leq 1/n\}$ es compacto en ℓ^2.

Pregunta 3. Sea X evn de dimensión infinita, pruebe que si X^* es separable entonces X también, para ello:

a) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso en X^*. Demuestre la existencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unitarios tales que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$.

b) Demuestre que $< \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} >$ es denso en X.
Indicación: Proceda por contradicción y utilice P1 parte c).

c) Concluya.

Pregunta 4. Probaremos ahora que el recíproco no es cierto. Para esto consideramos el espacio l^1 y probaremos que su dual se identifica con l^∞, proponiendo la isometría:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : l^\infty & \longrightarrow & (l^1)' \\ a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longrightarrow & \varphi_a \end{array}$$

con $\varphi_a(x_i)_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\, x_i$. Pruebe que:

a) $\varphi_a \in (l^1)'$ y que Φ es una isometría.

b) Pruebe que es sobreyectiva. Para esto se recomienda construir una preimagen de un elemento $x' \in (l^1)'$ a través de sus evaluaciones sobre la base canónica $a_i := x'(e_i)$, probar que esto entrega una sucesión a acotada y argumentando sobre un denso apropiado concluir que $\Phi(a) = x'$.

c) Con esto observe que Φ es la identificación entre ambos espacios, y asumiendo que l^∞ no es separable concluya .