MA3801 - Análisis. Semestre Otoño 2013
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Francisco Arana, Matías Godoy, Ignacio Vergara

Examen
Viernes 09 de Agosto, 2013

P1. Sea E un espacio topológico y F un espacio topolgíco separado. Considere $p_E : E \times F \to E$ la proyección de $E \times F$ en E.

a) Demuestre que p_E es abierta.

b) Muestre con un ejemplo que en general p_E no es cerrada.

c) Demuestre que si F es compacto, la aplicación p_E es cerrada.

d) Considere una función $f : E \to F$. Pruebe que si F es compacto y el grafo $G_f = \{(x, f(x)) : x \in E\}$ de f es cerrado en $E \times F$, entonces f es continua.

P2. Sea H un espacio de Hilbert. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno de H. Sea $A : H \to H$ un operador lineal y continuo.

a) Sea $f_y(x) = \langle Ax, y \rangle$. Pruebe que existe un único $z_y \in H$ tal que $f_y(x) = \langle x, z_y \rangle$ $\forall x \in H$. Muestre que se puede definir un operador lineal $A^* : H \to H$ por la relación:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

b) Pruebe que A^* es continuo, más aún $\|A^*\| \leq \|A\|$.

c) Suponga que existe $x \in H$ tal que $Ax \neq 0$. Defina

$$y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|}.$$

Sea $L \subset H$ el conjunto de todos los elementos de la forma λy_0. Considere $g : L \to \mathbb{R}$ definida como $g(\lambda y_0) = \lambda$. Muestre que se puede extender g a un funcional $\hat{g}$ en todo el espacio H tal que $\|\hat{g}\| = 1$.

d) Note que $\hat{g} \in H'$ y por lo tanto por el Teorema de representación de Riesz, $\exists! z \in H$ tal que $\hat{g}(x) = \langle x, z \rangle$ $\forall x \in H$. Calcule $\hat{g}(Ax)$ y pruebe que:

$$\|Ax\| = \langle x, A^* z \rangle$$

e) Concluya que $\|A\| \leq \|A^*\|$.

f) Considere ahora que $\|A\| \leq 1$. Sea $x \in H$, muestre que $Ax = x$ si y solamente si $\langle Ax, x \rangle = \|x\|^2$. Deduzca que $Ker(I - A) = Ker(I - A^*)$.
Indicación: Recuerde que la desigualdad de Cauchy-Schwartz es igualdad sólo si los vectores son colineales.

P3. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ lineal y continuo.

a) Sea y un elemento de la imagen de T. Muestre que el conjunto $\{x \in H \mid T(x) = y\}$ es una parte convexa y cerrada de H. Deduzca que existe un único $x_y \in H$ tal que $T(x_y) = y$ y tal que para todo $z \in H$ que satisface $T(z) = y$ se tiene $\|x_y\| \leq \|z\|$.

b) Muestre que x_y es ortogonal a $Ker(T)$.

c) Muestre que la aplicación que a $y \in T(H)$ asocia $x_y \in H$ es lineal.

En el espacio $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ consideremos $x = (x_0, x_1, \ldots)$ y $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \ldots)$. Definamos $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ dada por $T(x) = (x_1, x_2, \ldots)$.

d) Considere $M = \{x - T(x) \mid x \in \ell^\infty\}$. Pruebe que M es un subespacio vectorial de ℓ^∞.

e) Pruebe que $d(\mathbb{1}, M) \leq 1$.

f) Pruebe que $d(\mathbb{1}, M) = 1$.
Indicación: Considere separadamente los casos $x \in \ell^\infty : \exists n \ (x - T(x))_n < 0$, y su complemento.