MA3801 - Análisis. Semestre Otoño 2013
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Francisco Arana, Matías Godoy, Ignacio Vergara

Control 3
Martes 30 de Julio, 2013

P1. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = (\sin x)^n$.

a) Demuestre que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ tiene un límite puntual sobre $[0, \pi/2]$, calcúlelo. ¿Converge uniformemente sobre $[0, \pi/2]$?.

b) ¿Converge uniformemente sobre $[0, \pi/2)$? ¿Converge uniformemente sobre cada parte compacta de $[0, \pi/2)$?.

Sea E el e.v. de las funciones continuas de $[0, \pi/2]$ en $\mathbb{R}$ con la norma de la convergencia uniforme, esto es, $E = \mathcal{C}(\overline{(0, \pi/2)}; \mathbb{R})$. Sea $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$.

c) Demuestre que $(f_n)_n$ es una sucesión de puntos de E que no tiene puntos de acumulación. Concluya que A es un subconjunto no compacto de E.

d) Demuestre que A es cerrado en E.
Indicación: pruebe que en un espacio métrico, la adherencia del conjunto de puntos de una sucesión está conformada por los puntos mismos de la sucesión y por sus puntos de acumulación.

e) ¿Es A acotado? ¿Es A equicontinuo?.

f) Demuestre que en E la bola unidad cerrada $\overline{B}(0; 1)$ no es compacta. Deduzca de esto que E no es localmente compacto.

P2. Definamos los siguientes espacios vectoriales de sucesiones:

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\} \text{ para } p \in [1, \infty)$$
$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$
$$c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_n \to 0\}$$
$$\ell^f = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = 0\}$$

En los espacios ℓ^p consideramos $\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y en ℓ^∞ consideramos $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Estas funciones son normas en ℓ^p y ℓ^∞ respectivamente (no lo demuestre).

a) Demuestre que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

b) Demuestre que c_0 es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^∞.

c) Demuestre que ℓ^f dotado de $\|\cdot\|_\infty$ no es Banach.

d) Demuestre que ℓ^f es denso en ℓ^p para todo $p \in [1, \infty)$.

e) Demuestre que ℓ^∞ no es separable.
Indicación: Considere, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, la sucesión x^A, dada por $x^A_n = 1$ si $n \in A$ y $x^A_n = 0$ si $n \in A^c$.

f) Considere el conjunto $P = \{x \in \ell^1 : x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que P tiene interior vacío en ℓ^1.

P3. *a)* Sea $\ell_n : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$\ell_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 x(t)dt$$

Pruebe que ℓ_n es lineal continuo, $\ell_n(x) \to 0$ para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$, pero $\|\ell_n\|_{(\mathcal{C}[0,1])'} \not\to 0$.

b) Sea E un e.v.n. y S un s.e.v. denso de E, suponga que $f \in S'$. Sin usar el Teorema de Hahn-Banach, pruebe que existe $g \in E'$, que prolonga a f y tal que $\|f\| = \|g\|$. Pruebe además que esta extensión es única.