Solución P2 Control 3

a) Demuestre que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
Solución:
Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ una sucesión de Cauchy. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \|x^n - x^m\|_\infty$$

donde $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe $x_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definamos entonces $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$ y para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \|x^n - x^m\|_\infty < \varepsilon.$$

Tomamos límite en m y obtenemos

$$|x_k^n - x_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$\|x^n - x\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Observando que

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^N| + |x_k^N| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se concluye que $x \in \ell^\infty$. Con todo lo anterior, $x^n \to x$ en ℓ^∞ y por lo tanto ℓ^∞ es completo.

b) Demuestre que c_0 es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^∞.
Solución:
Primera forma:
Demostraremos que $\ell^\infty \setminus c_0$ es abierto. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \setminus c_0$, es decir $x_n \nrightarrow 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N, \ |x_n| > 2\varepsilon.$$

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir, $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Entonces

$$|y_n| \geq |x_n| - |x_n - y_n| \geq |x_n| - \|x - y\|_\infty > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Entonces (y_n) no puede converger a 0. Por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subseteq \ell^\infty \setminus c_0$ y se concluye que $\ell^\infty \setminus c_0$ es abierto.
Segunda forma:
Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_0$ una sucesión convergente a $x \in \ell^\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq m, \ \|x^n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall j \geq k, \ |x_j^m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, para todo $j \geq k$,

$$|x_j| \leq |x_j - x_j^m| + |x_j^m| \leq \|x - x^m\|_\infty + |x_j^m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $x \in c_0$ y así c_0 es cerrado.

c) Demuestre que ℓ^f dotado de $\|\cdot\|_\infty$ no es Banach.
Solución:
Definamos la sucesión $(x^n)_{n\geq 1}$ de la siguiente forma:

$$x_k^n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Claramente $(x^n)_{n\geq 1} \subseteq \ell^f$. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Sean $n \geq m \geq N$. Entonces

$$\|x^n - x^m\|_\infty = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Definamos ahora la sucesión $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ con $x_k = \frac{1}{k}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos el mismo $N \in \mathbb{N}$ anterior y así

$$\|x^n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $x^n \to x$ en ℓ^∞ y claramente $x \notin \ell^f$. Como ℓ^f es un subespacio de ℓ^∞, por unicidad del límite no puede existir $y \in \ell^f$ tal que $x^n \to y$. Se concluye que $(\ell^f, \|\cdot\|_\infty)$ no es Banach.

d) Demuestre que ℓ^f es denso en ℓ^p para todo $p \in [1, \infty)$.
Solución:
Sea $p \geq 1$. Sean $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ y $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p < \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k\geq n} |x_k|^p < \varepsilon^p.$$

Definamos $y \in \ell^f$ de la siguiente forma:

$$y_k = \begin{cases} x_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Entonces

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k>n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto ℓ^f es denso en ℓ^p.

e) Demuestre que ℓ^∞ no es separable.
Indicación: Considere, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, la sucesión x^A, dada por $x_n^A = 1$ si $n \in A$ y $x_n^A = 0$ si $n \in A^c$.
Solución:
Definamos las sucesiones de la indicación. Notemos que si $A \neq B$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k^A \neq x_k^B$, o equivalentemente $|x_k^A - x_k^B| = 1$. Así $\|x^A - x^B\|_\infty = 1$ y por lo tanto $B(x^A, \frac{1}{2}) \cap B(x^B, \frac{1}{2}) = \varnothing$. Notemos que

$$|\{x^A\}_{A\subseteq\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c.$$

Esto quiere decir que hay una cantidad no numerable de bolas disjuntas dos a dos. Recordemos que un conjunto denso debe tener intersección no vacía con toda bola, en particular con las $\{B(x^A, \frac{1}{2})\}_{A\subseteq\mathbb{N}}$. Por lo tanto este conjunto no puede ser numerable.

f) Considere el conjunto $P = \{x \in \ell^1 : x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que P tiene interior vacío en ℓ^1.
Solución:
Sean $x = (x_k)_{\in \mathbb{N}} \in P$ y $\varepsilon > 0$. Demostraremos que $B(x, \varepsilon) \nsubseteq P$. Notemos que $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k < \infty$ y por lo tanto $x_k \to 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n$, $x_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Definamos la sucesión

$$y_k = \begin{cases} x_k - \frac{\varepsilon}{2}, & k = n \\ x_k, & k \neq n \end{cases}$$

Así $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \notin P$. Sin embargo,

$$\|x - y\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto P tiene interior vacío en ℓ^1.