P3 $\alpha \in (0,1)$

$$C^\alpha([0,1]) = \left\{ f\ [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ |f|_\alpha = \sup_{0 \le x \neq y \le 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

Se def $d_\alpha(f,g) = d_\infty(f,g) + |f-g|_\alpha = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \le x \neq y \le 1} \frac{|f(x) - g(x) - f(y) + g(y)|}{|x-y|^\alpha}$

a) Veamos que d_α es metrica en $C^\alpha([0,1])$

Obs Si $|f|_\alpha < \infty \Rightarrow \exists M$ tq $|f(x) - f(y)| < M|x-y|^\alpha \Rightarrow f \in C^0$

- $d_\alpha(f,g) = 0 \Rightarrow d_\infty(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$

  Si $f = g \Rightarrow d_\infty(f,g) = 0 \wedge |f-g|_\alpha = 0$ (fácil) $\Rightarrow d_\alpha(f,g) = 0$

- $d_\alpha(f,g) = d_\alpha(g,f)$ Trivial
- $d_\alpha(f,g) \le d_\alpha(f,h) + d_\alpha(h,g)$, d_∞ es dist

$$d_\alpha(f,g) = d_\infty(f,g) + |f-g|_\alpha \le d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) + |f-g|_\alpha$$

ahora Dados $x \neq y$ $|f(x) - g(x) - (f(y) - g(y))|$

$$= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x) - (f(y) - h(y) - g(y) + h(y))|$$

$$\le |f(x) - h(x) - (f(y) - h(y))| + |h(x) - g(x) - (h(y) - g(y))|$$

$$\Rightarrow |f-g|_\alpha \le |f-h|_\alpha + |h-g|_\alpha$$

divido
por $|x-y|^\alpha$
y tomo sup

$\therefore$ $d_\alpha(f,g) \le d_\alpha(f,h) + d_\alpha(h,g)$ $\quad \therefore$ d_α es metrica

Veamos que $(C^\alpha([0,1]), d_\alpha)$ es completo

Sea $\{f_n\}_n$ de Cauchy en d_α, como $d_\infty(f_n, f_m) \le d_\alpha(f_n, f_m)$

$\Rightarrow \{f_n\}_n$ es de Cauchy en d_∞, que es completo $\Rightarrow \exists\ f \in C([0,1])$

tq $d_\infty(f_n, f) \to 0$ Naturalmente $f \in C([0,1])$ es el candidato a límite para la suc $\{f_n\}_n$ en $C^\alpha([0,1])$ Veamos que efectivamente lo es

Notemos que, si $\{f_n\}_n$ es de Cauchy 7/10

ie Dado ~~∃~~ $\varepsilon>0$ $\exists N$ tq $\forall n,m\geq N$ $d_\alpha(f_n,f_m)<\varepsilon$

$$\iff d_\infty(f_n,f_m)+\underbrace{|f_n-f_m|_\alpha}_{\geq\, \left||f_n|_\alpha-|f_m|_\alpha\right|}<\varepsilon \implies |f_n|_\alpha \text{ es de Cauchy}$$

en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es conv $\Rightarrow$ es acotada

$\therefore$ $\exists M\in\mathbb{R}$ tq

$$\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\leq |f_n|_\alpha\leq M \quad \forall n,\ \forall x\neq y$$

aprovechando la cv puntual $\Rightarrow$ $\displaystyle\sup_{0\leq x\neq y\leq 1}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\leq M$ $\therefore$ $f\in C^\alpha([0,1])$

Luego, solo falta ver que $d_\alpha(f_n,f)\to 0$

Para ello ~~nuevamente~~ veamos $|f_n-f|_\alpha\to 0$ ~~Sean $x\neq y$~~

$$\cancel{\frac{|f_n(x)-f(x)-(f_n(y)-f(y))|}{|x-y|^\alpha}\leq\frac{|f_n(x)-f(x)|}{|x-y|^\alpha}+\frac{|f_n(y)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}}$$

~~Nuevamente~~ Como tenemos suc de Cauchy

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ tq $\forall n,m\geq N$ se tiene $|f_n-f_m|_\alpha<\varepsilon$

ie $\forall x\neq y$ $\forall n,m\geq N$ $\displaystyle\frac{|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(y)-f_m(y))|}{|x-y|^\alpha}<\varepsilon$

gracias a cv punt puedo tomar $m\to\infty$

$(\forall x\neq y)(\forall n\geq N)$ $\displaystyle\frac{|f_n(x)-f(x)-(f_n(y)-f(y))|}{|x-y|^\alpha}<\varepsilon$

Tomando sup $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ tq $\forall n\geq N_0$ $|f_n-f|<\varepsilon$ y se concl

$\therefore$ $(C^\alpha([0,1]),d_\alpha)$ es completo

b) Queremos ver que $\overline{B}_\alpha = \{ f \in C^\alpha([0,1]) \quad d_\alpha(f,0) \leq 1 \}$ es cpta en $(C([0,1]), d_\infty)$ 3/10

1) Ver que $\overline{B}_\alpha$ es cerrado en $(C([0,1]), d_\infty)$

Sea $(f_n) \subseteq \overline{B}_\alpha$ tq $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$ Veamos que $f \in C^\alpha([0,1])$

Notemos que

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| = |x-y|^\alpha \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}}_{\leq |f_n|_\alpha}$$

luego $|f|_\alpha = \sup_{x \neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \limsup |f_n|_\alpha \underset{\{f_n\} \subseteq \overline{B}_\alpha}{\leq} 1$

$\therefore |f|_\alpha \leq \limsup_n |f_n| \leq 1 < \infty \quad \therefore f \in C^\alpha([0,1])$

Por otro lado $\underset{\in C^\alpha}{f_n \xrightarrow{cu} f}$ $\quad d_\alpha(f_n, 0) = d_\infty(f_n, 0) + |f_n|_\alpha \leq 1 \quad \forall n$

$$\downarrow cu \qquad \downarrow cp$$

$$d_\infty(f,0) + |f|_\alpha \leq 1$$

$\therefore \overline{B}_\alpha$ es cerr bajo d_∞

2) Veamos que es compacta, como ya es cerrada, basta ver que es r c, usemos A A, es decir, verifiquemos que

2 1) $\overline{B}_\alpha$ es tq el cto $\{ f(x) \; f \in \overline{B}_\alpha \}$ es acotado en $\mathbb{R}$ $\forall x \in [0,1]$

Notando que $\overline{B}_\alpha \subset \overline{B}_{C([0,1])}$ esto es gratis

2 2) $\overline{B}_\alpha$ es equicontinuo

Sea $\varepsilon > 0$ Probemos que si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \overline{B}_\alpha$

notemos que, si $f \in \overline{B}_\alpha \quad \forall x \neq y \quad |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha \underbrace{|f|_\alpha}_{\leq 1} \leq |x-y|^\alpha$

luego si $|x-y| < \varepsilon^{1/\alpha} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |\varepsilon^{1/\alpha}|^\alpha = \varepsilon$

$\therefore \forall x,y \in [0,1]$ tq $|x-y| < \delta = \varepsilon^{1/\alpha} \Rightarrow \forall f \in \overline{B}_\alpha \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Por Arzela-Ascoli $\overline{B}_\alpha$ es compacto en $(C([0,1]), d_\infty)$

c) $1>\beta>\alpha>0$ Queremos ver que $\overline{B}_\beta$ es compacto en (C^α, d_α) (relativa) cpto ← met

Obs A A NO sirve pues solo permite probar compacidad en $(C(X,Y), d_\infty)$

Veamos la Ind Probemos que si $f \in C^\beta([0,1])$ y $\eta>0$

$$|f|_\alpha \leq \max(|f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha})$$

• Sup $|x-y| \geq \eta$ $\quad \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \dfrac{|f(x)-f(y)|}{\eta^\alpha} \leq \dfrac{|f(x)|+|f(y)|}{\eta^\alpha} \leq 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}$

$|x-y|^\alpha \geq \eta^\alpha$

• Sup $|x-y|<\eta$ $\quad \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha |x-y|^\beta} |x-y|^\beta = \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} |x-y|^{\beta-\alpha}$

$|x-y|^{\underbrace{\beta-\alpha}_{>0}} < \eta^{\beta-\alpha}$ $\qquad \leq \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \eta^{\beta-\alpha}$

Tomo sup

$\Rightarrow |f|_\alpha \leq |f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}$

$\therefore |f|_\alpha \leq \max\{|f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}\}$ Obs $C^\beta \subset C^\alpha$ si $\beta>\alpha$

(Veamos que, como estamos en esp metriz que Dada una sucesion $\{f_n\}$ en $\overline{B}_\beta$ es posible extraer una subsucesión convergente respecto a d_α)

Sigamos viendo la ind Sea $\{f_n\}$ acot en C^β, $\{f_n\} \xrightarrow{d_\infty} f \in C^\beta$

Como (f_n) acot en C^β $\exists M>0$ tq $d_\beta(f_n,0) \leq M$, Como $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$ basta

ver que $|f_n - f|_\alpha \to 0$ Sea $\varepsilon>0$

Escojamos $\eta>0$ tq $(M + d_\beta(f,0))\eta^{\beta-\alpha} < \varepsilon$

y sea N tq $\forall n>N$ $d_\infty(f_n - f, 0) < \varepsilon \dfrac{\eta^\alpha}{2}$

$\therefore \forall n \geq N$ $|f_n - f|_\alpha \leq \max\{\underbrace{|f_n - f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}}, \underbrace{2d_\infty(f_n, f, 0)\eta^{-\alpha}}_{<\varepsilon''}\} < \varepsilon$

$\leq (d_\beta(f_n,0) + d_\beta(f,0))\eta^{\beta-\alpha}$

$\leq \underbrace{(M + d_\beta(f,0))\eta^{\beta-\alpha}}_{<\varepsilon}$

De donde se concluye $|f_n - f|_\alpha \longrightarrow 0 \Rightarrow d_\alpha(f_n - f, 0) \longrightarrow 0$ $^{10}/_{10}$

Con esto se concluye la indicación

Probemos finalmente lo deseado

Sea $\{f_n\} \subset \overline{B}_\beta \Rightarrow$ es acotada $(\overline{B}_\beta \subseteq \overline{B}_\alpha$! por la desig$)$

Como $\{f_n\} \subset \overline{B}_\alpha \Rightarrow \exists (f_{n_k}) \xrightarrow{d_\infty} f \in \overline{B}_\alpha$, más aun $f \in C^\beta$ (lem ~~punt~~ unif de acot en C^β

(cv punt $\Rightarrow |f_n|_\beta \leq M$
$\downarrow$
$|f|_\beta$)

$\therefore$ Por lo recien visto $d_\alpha(f_{n_k} - f, 0) \longrightarrow 0$

y se concluye $\blacksquare$