Auxiliar 6 - MA3801 - Análisis
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile
Martes 23 de Abril, 2013

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.
Profesores Auxiliares: Francisco Arana - Matías Godoy Campbell - Ignacio Vergara S.

Pregunta 2. Una pequeña observación sobre este problema. Como les dije en la clase, se me había olvidado poner que X es un espacio compacto, de todos modos todo es similar si se trabaja en K_1 como compacto de referencia, al ser una familia decreciente de compactos.

Pregunta 3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X se dice *localmente finita* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $V \in \mathcal{N}_x$ que solo intersecta un número finito de A_λ's

a) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ localmente finita. Pruebe que la familia $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita y que para todo $I \subset \Lambda$ el conjunto $\bigcap_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}$ es cerrado.

Solución: La primera parte la vimos en clase, veamos la segunda, es decir, veamos que, dado $I \subseteq \Lambda$ entonces:

$$\bigcup_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda} \text{ es cerrado}$$

para ello veamos que su complemento es abierto, es decir, veamos que:

$$\bigcap_{\lambda\in I} \overline{A}_\lambda^c \text{ es abierto}$$

en efecto, notemos que:

$$x \in \bigcap_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}^c \Leftrightarrow x \notin \overline{A}_\lambda \quad \forall\lambda \in I, \quad I \subseteq \Lambda$$

Ahora, notando que $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia localmente finita entonces $\exists V \in \mathcal{N}_x$ abierto tal que

$$V \cap \overline{A_\lambda} \neq \emptyset \quad \forall\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

o equivalentemente

$$V \cap \overline{A_\lambda} = \emptyset \quad \forall\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

por lo tanto

$$V \subseteq \overline{A}_\lambda^c \quad \forall\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

luego

$$V \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} \overline{A}_\lambda^c \subseteq \bigcap_{\lambda\in I\setminus\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} \overline{A}_\lambda^c$$

esto último pues $I \subseteq \Lambda$.

Así pues, escogiendo

$$W = V \cap \bigcap_{\lambda\in F} \overline{A}_\lambda^c$$

donde $F = I \cap \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ que es un conjunto de índices finito, se tiene que W es abierto y contiene a x, más aun:

$$W = V \cap \bigcap_{\lambda\in F} \overline{A}_\lambda^c \subseteq \bigcap_{\lambda\in I\setminus\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} \overline{A}_\lambda^c \cap \bigcap_{\lambda\in F} \overline{A}_\lambda^c = \bigcap_{\lambda\in I} \overline{A}_\lambda^c$$

y por lo tanto: $x \in W \subset \bigcap_{\lambda\in I} \overline{A}_\lambda^c$. De donde se concluye que $\bigcup_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}$ es cerrado.

b) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento cerrado y localmente finito de X. Pruebe que $B \subset X$ es cerrado ssi para todo $\lambda \in \Lambda$ el conjunto $B \cap A_\lambda$ es cerrado en la topología traza de A_λ.

Solución: ($\Rightarrow$) Sea $\{A_\lambda\}_\lambda$ un recubrimiento cerrado y localmente finito. Suponiendo que B es cerrado, dado $\lambda \in \Lambda$ arbitrario, notemos que $B \cap A_\lambda$ es cerrado en A_λ pues B es cerrado en X.

($\Leftarrow$): Supongamos que para todo $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $B \cap A_\lambda$ es cerrado en A_λ que es cerrado por hipótesis. Luego, se tiene que $B \cap A_\lambda = F \cap A_\lambda$ con F algún cerrado en X. Más aun, $B \cap A_\lambda$ es cerrado X al ser intersección de cerrados (F y A_λ).
Notemos además, que $\{B \cap A_\lambda\}_\lambda$ es una familia localmente finita, en efecto:

$$\text{dado } x \in X\text{: } \exists V \in \mathcal{N}_x : V \cap A_\lambda = \emptyset \ \ \forall \lambda \in \Lambda \setminus F$$

donde F es un conjunto finito, más aun:

$$B \cap A_\lambda \cap V \subseteq A_\lambda \cap V$$

por lo tanto:

$$B \cap A_\lambda \cap V = \emptyset \ \ \forall \lambda \in \Lambda \setminus F', \quad F' \subseteq F$$

así $\{B \cap A_\lambda\}_\lambda$ es una familia localmente finita y como $B \cap A_\lambda$ es cerrado en X para todo λ entonces:

$$\{B \cap A_\lambda\}_\lambda = \{\overline{B \cap A_\lambda}\}_\lambda$$

Finalmente, notando que por la parte anterior con $I = \Lambda$ se tiene que:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (B \cap A_\lambda) \text{ es cerrado}$$

pero

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (B \cap A_\lambda) = B \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = B \cap X = B \text{ es cerrado}$$

donde la unión de los A_λ es X al ser recubrimiento.

c) Pruebe que X es conexo ssi todo recubrimiento $\mathcal{R} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de X satisface la siguiente propiedad:

$$\forall A_1, A_n \in \mathcal{R} \text{ existen } A_2, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{R}, \text{ tal que } A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset \text{ con } i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Solución: Probemos, por simplicidad, la siguiente equivalencia:

$$X \text{ disconexo } \Leftrightarrow \exists \mathcal{R} = \{A_\lambda\}_\lambda \text{ rec. abierto tal que: } \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R} \exists i \in \{1, \ldots, n-1\} : A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$$

($\Rightarrow$): Si X es disconexo entonces se puede particionar con abiertos, i.e. $X = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1, A_2 abiertos. Luego, basta tomar $\mathcal{R} = \{A_1, A_2\}$ que satisface claramente lo deseado.

($\Leftarrow$): Supongamos que $\exists \mathcal{R} = \{A_\lambda\}_\lambda$ rec. abierto tal que: $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R} \exists i \in \{1, \ldots, n-1\} : A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$. Consideremos dos abiertos A, B fijos en $\mathcal{R}$ tal que satisfacen lo anterior con $A_1 = A$ y $A_n = B$ y consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{S} = \{C \in \mathcal{R} \mid \exists \text{ secuencia finita } A_1 = A, A_2, \ldots, A_n = C \in \mathcal{R} \text{ tal que } A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset \ \forall i\}$$

notemos que naturalmente $A \in \mathcal{S}$ y $B \notin \mathcal{S}$.
Escogiendo

$$C_1 = \bigcup_{C\in\mathcal{S}} C \qquad C_2 = \bigcup_{C\notin\mathcal{S}} C$$

se tiene que: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ pues $A \in C_1$ y $B \in C_2$, más aun, son abiertos al ser unión arbitraria de abiertos, y por construcción su unión es X y son disjuntos (verificar!). Luego, esto nos muestra que X se escribe como la unión de dos abiertos no vacíos disjuntos, por lo tanto X es disconexo.

d) Muestre que la parte anterior también vale si reemplazamos *"todo recubrimiento abierto $\mathcal{R}$..."* por *"todo recubrimiento cerrado y localmente finito $\mathcal{R}$"*

Solución: ($\Rightarrow$): Basta notar que si X es disconexo entonces se puede particionar en cerrados no vacíos, es decir:

$$\exists F_1, F_2 \text{ cerrados tal que: } F_1 \cap F_2 = \emptyset, F_1 \cup F_2 = X; F_1, F_2 \neq \emptyset$$

así, basta tomar $\mathcal{R} = \{F_1, F_2\}$ que es un cubrimiento localmente finito (de hecho finito) y cerrado que no satisface la propiedad.
($\Leftarrow$): Si consideramos C_1 y C_2 como en la parte anterior y notamos que:

$$C_1 \cap A_\lambda = \begin{cases} A_\lambda & \text{si } A_\lambda \in S \\ \emptyset & \sim \end{cases}$$

Luego $C_1 \cap A_\lambda$ es cerrado en A_λ que es cerrado por hipótesis, luego gracias a la parte b) se tiene que C_1 es cerrado. De la misma forma se tiene que C_2 es cerrado. Más aun, $C_1 \cup C_2 = X$ y $C1 \cap C2 = \emptyset$, luego X se particiona en cerrados y por lo tanto es disconexo.

Pregunta 4. Sea (X, τ) espacio topológico. Diremos que una familia $\mathcal{S} \subset \tau$ es una sub-base para el espacio topológico (X, τ) si la familia:

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcap_{i<n} S_i \in \mathcal{P}(X) : \ n \in \mathbb{N} \wedge \forall i < n, \ S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

forma una base para X.
Nuestro objetivo es probar el siguiente resultado:

Lema de Alexander: Si existe una sub base $\mathcal{S}$ de un espacio topológico X tal que todo cubrimiento abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ de X posee un subrecubrimiento finito, entonces X es compacto.
Para probar esto:

a) (Propuesto) Pruebe el siguiente resultado, equivalente al Lema de Zorn, llamado Principio de Maximalidad de Haussdorf: Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos de A tal que toda cadena $S \subset \mathcal{F}$ es tal que su unión $\cup S$ está en $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ posee un elemento maximal respecto a la inclusión.
Observación: Por simplicidad notacional, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, entonces denotamos $\cup\mathcal{G}$ a $\cup_{G \in \mathcal{G}} G$.

Solución: Propuesto.

b) Razonando por contradicción y considerando una familia apropiada para utilizar la parte anterior concluya lo deseado.

Solución: Sea $\mathcal{S}$ una subbase de X tal que todo cubrimiento $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ posee subrecubrimiento finito. Sea $\beta = \beta(\mathcal{S})$ una base de X generada por $\mathcal{S}$.
Supongamos que X no es compacto, luego existe $\mathcal{U}_0$ subfamilia infinita de β (gracias a P0 esto es suficiente) tal que $\mathcal{U}_0$ cubre X pero no posee subrecubrimiento finito.
Definamos

$$\mathcal{F} := \left\{ \mathcal{U} \subset \beta(\mathcal{S}) \mid \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}, X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \text{ y no existe subrec. finito } \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ de } X \right\}$$

Naturalmente $\mathcal{F}$ es no vacío, veamos que satisface las condiciones del principio de maximalidad de Haussdorf:
Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una cadena, si $T \subset \bigcup \mathcal{G}$ es un recubrimiento finito entonces $\exists \mathcal{U}$ tal que $T \subset \mathcal{U}$, pero en tal

caso T no puede cubrir X pues $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$.
Por lo tanto $\bigcup \mathcal{G}$ no puede tener un subrecubrimiento finito. De donde se deduce que

$$\bigcup \mathcal{G} \in \mathcal{F}$$

Luego, por la parte anterior, $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{F}$ que es maximal respecto a la inclusión.

Sea $U \in \mathcal{U}$, luego $U = \bigcap_{i<n} U_i$ para $U_i \in \mathcal{S}$
Afirmación:

$$\exists j < n \; U_j \in \mathcal{U} \quad (*)$$

Asumamos la afirmación, notemos que en tal caso se tiene que:

$$\forall U \in \mathcal{U} \; \exists V = U_j \in \mathcal{U} \cap \mathcal{S}, \quad U \subseteq V$$

luego: $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$ es un cubrimiento de X, que por hipótesis (pues está contenido en $\mathcal{S}$) posee subrecubrimiento finito, lo que es una contradicción y concluye la demostración del Teorema.

Probemos lo que nos queda pendiente, la afirmación realizada para concluir:
Si $(*)$ no se satisface, $\forall i < n$ se puede encontrar $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ finito tal que $\mathcal{U}_i \cup \{U_i\}$ cubre X. Luego $\mathcal{U}_i$ cubre $X \setminus U_i$, lo que implica que:

$$\bigcup_{i<n} \mathcal{U}_i \text{ cubre } \bigcup_{i<n} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcap_{i<n} U_i = X \setminus U$$

Luego, $\bigcup_{i<n} \mathcal{U}_i \cup \{U\} \subset \mathcal{U}$ es un cubrimiento finito de X (pues los $\mathcal{U}_i$ son finitos), lo que contradice el hecho que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$. Esto prueba la afirmación.