MA3801 - Análisis. Semestre Otoño 2013
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Francisco Arana, Matías Godoy, Ignacio Vergara

Solución P3 Control 1

a) Sean E y F dos espacios topológicos, $f : E \to F$ una función y $G_f = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F$ su grafo. Demuestre que f es continua si y sólo si la aplicación

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & G_f \\ & & x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

es un homeomorfismo. *Indicación: Para la implicación en uno de los sentidos, pruebe que para todo $B \subseteq F$, $f^{-1}(B) = \Phi^{-1}((E \times B) \cap G_f)$.*

Solución:

Veamos primero que Φ es una biyección. Por la definición de grafo se tiene que $\mathrm{Im}(\Phi) = G_f$, por lo que es sobreyectiva. Sean ahora $x, y \in E$ tales que $\Phi(x) = \Phi(y)$, es decir, $(x, f(x)) = (y, f(y))$, lo que implica que $x = y$. Así, Φ es también inyectiva. **(0.2)**

Demostremos la indicación. Sea $B \subseteq F$,

$$\Phi^{-1}((E\times B)\cap G_f) = \{x \in E : \Phi(x) \in E \times B\} = \{x \in E : (x, f(x)) \in E \times B\} = \{x \in E : f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$$

Supongamos que Φ es un homeomorfismo. Sea $B \subseteq F$ abierto. Sabemos que $f^{-1}(B) = \Phi^{-1}((E \times B) \cap G_f)$ y que $(E \times B) \cap G_f$ es abierto en G_f (con la topología traza inducida por la topología producto) ya que $E \times B$ es abierto en $E \times F$. Como Φ es continua se concluye que $f^{-1}(B)$ es abierto y por lo tanto f es continua. **(0.6)**

Supongamos ahora que f es continua. Veamos que Φ es continua. Debemos demostrar que la preimagen de todo abierto de G_f es un abierto en E. Notemos que basta considerar conjuntos de la forma $(A \times B) \cap G_f$ con A abierto en E y B abierto en F. Esto ya que si U es abierto en G_f, existe W abierto en $E \times F$ tal que $U = W \cap G_f$ y como W es un abierto en la topología producto, existen familias de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ en E y F respectivamente tales que $W = \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$. Así,

$$\Phi^{-1}(U) = \Phi^{-1}(W \cap G_f) = \Phi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i) \cap G_f\right) = \bigcup_{i\in I}\Phi^{-1}((A_i \times B_i) \cap G_f)$$

Notemos ahora que

$$\Phi^{-1}((A \times B) \cap G_f) = \{x \in E : (x, f(x)) \in A \times B\} = A \cap f^{-1}(B)$$

Como f es continua, este conjunto es abierto y por lo tanto Φ es continua. **(0.6)**

Veamos por último que Φ^{-1} es continua. Sea U abierto en E. Demostraremos que $\Phi(U)$ es abierto. En efecto,

$$\Phi(U) = \{(x, f(x)) : x \in U\} = (U \times F) \cap G_f \quad \text{(abierto en } G_f)$$

Por lo tanto Φ es un homeomorfismo. **(0.6)**

b) Sean E y F dos espacios topológicos. Sean $A \subseteq E$, $B \subseteq F$. Demuestre que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. En particular, demuestre que $A \times B$ es cerrado en $E \times F$ si y sólo si A es cerrado en E y B es cerrado en F.

Solución:

Sea $(x, y) \in E \times F$. Notemos que, por la definición de la topología producto, si llamamos $\mathcal{V}(z)$ al conjunto de vecindades de z, $\{U \times V : U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y)\}$ es una base de vecindades de (x, y). Por lo tanto

$$\begin{aligned} (x,y) \in \overline{A \times B} &\iff \forall U \in \mathcal{V}(x),\ \forall \in \mathcal{V}(y),\ (A \times B) \cap (U \times V) \neq \varnothing \\ &\iff \forall U \in \mathcal{V}(x),\ \forall \in \mathcal{V}(y),\ (A \cap U) \times (B \cap V) \neq \varnothing \\ &\iff \forall U \in \mathcal{V}(x),\ \forall \in \mathcal{V}(y),\ A \cap U \neq \varnothing\ \wedge\ B \cap V \neq \varnothing \\ &\iff x \in \overline{A}\ \wedge\ y \in \overline{B} \\ &\iff (x,y) \in \overline{A} \times \overline{B} \qquad (\mathbf{1{,}6}) \end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad de conjuntos. Se concluye que

$$\begin{aligned} A \times B \text{ cerrado en } E \times F &\iff A \times B = \overline{A \times B} \\ &\iff A \times B = \overline{A} \times \overline{B} \\ &\iff A = \overline{A} \ \wedge \ B = \overline{B} \\ &\iff A \text{ cerrado en } E \ \wedge \ B \text{ cerrado en } F \qquad (\mathbf{0{,}4}) \end{aligned}$$

c) Sean $E = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $F = \prod_{i=1}^{n} Y_i$ dos espacios producto y sean $f_i : X_i \to Y_i$ $i = 1, ..., n$. Se define la función vectorial

$$\begin{array}{rccc} \prod_{i=1}^{n} f_i : & E & \longrightarrow & F \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1), ..., f_n(x_n)) \end{array}$$

Demuestre que $\prod_{i=1}^{n} f_i$ es continua si y sólo si f_i es continua $\forall i = 1, ..., n$.

Solución:

Llamemos $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$. Supogamos primero que las f_i son continuas. Gracias a la misma observación de la parte anterior basta ver que la preimagen de todo abierto elemental de F es abierto en E para concluir la continuidad de f. Sean entonces $V_i \subseteq Y_i$, $i = 1, ..., n$ abiertos.

$$f^{-1}(V_1 \times \cdots \times V_n) = \{(x_1, ..., x_n) \in E : f_i(x_i) \in V_i, i = 1, ..., n\} = f_1^{-1}(V_1) \times \cdots \times f_n^{-1}(V_n)$$

Esto es un abierto elemental de E y por lo tanto f es continua. **(1.0)**
Supongamos ahora que f es continua. Sean $V_i \subseteq Y_i$, $i = 1, ..., n$ abiertos. Sabemos entonces que $f_1^{-1}(V_1) \times \cdots \times f_n^{-1}(V_n)$ es abierto. Esto implica que cada uno de los $f_i^{-1}(V_i)$ es abierto. En efecto, sean $x_i \in f_i^{-1}(V_i)$, $i = 1, ..., n$. Entonces existen abiertos $U_i \subseteq X_i$ tales que $(x_1, ..., x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq f_1^{-1}(V_1) \times \cdots \times f_n^{-1}(V_n)$, es decir, $x_i \subseteq U_i \subseteq f_i^{-1}(V_i)$ para todo $i = 1, ..., n$. Por lo tanto las f_i son continuas. **(1.0)**