Solución P4c Auxiliar 5

Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definamos

$$B_{(n,m)} = \{(n,m)\} \quad \text{para } (n,m) \in X \setminus \{(0,0)\}$$

y $B_{(0,0)} = \{V \subseteq X : (0,0) \in V \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \text{ el conjunto } \{k \in \mathbb{N} : (n,k) \notin V\} \text{ es finito}\}$

Demuestre que:

i) $\mathcal{B} = \bigcup_{(n,m) \in X} B_{(n,m)}$ es base para alguna topología τ en X .

ii) (X, τ) es Hausdorff.

iii) Ninguna sucesión en $X \setminus \{(0,0)\}$ converge a $(0,0)$.

iv) Existe una sucesión en $X \setminus \{(0,0)\}$ que tiene a $(0,0)$ como punto de acumulación.

Solución:

i) Notemos que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ya que $X \setminus \{(0,0)\} = \bigcup_{(n,m) \neq (0,0)} \{(n,m)\}$ y si a esto le agregamos cualquier elemento de $B_{(0,0)}$, cubrimos todo el espacio. Observemos ahora que la clase $\mathcal{B}$ es cerrada para intersecciones finitas (no vacías). En efecto, sean $V, W \in \mathcal{B}$, es decir, $V \in B_{(n,m)}$ y $W \in B_{(k,l)}$ para ciertos $n, m, k, l \in \mathbb{N}$. Si $(n,m) \neq (0,0)$ y $(k,l) \neq (0,0)$, entonces o bien $V \cap W = \emptyset$ o $V \cap W = \{(n,m)\}$. Lo mismo pasa si $(k,l) = (0,0)$ y $(n,m) \neq (0,0)$. Si ambos son $(0,0)$, entonces

$$(0,0) \in V \wedge \exists i_0, \forall i \geq i_0, |\{j : (i,j) \notin V\}| < \infty$$

$$(0,0) \in W \wedge \exists i_1, \forall i \geq i_1, |\{j : (i,j) \notin W\}| < \infty$$

Notemos entonces que $\forall i \geq \max\{i_0, i_1\}, |\{j : (i,j) \notin V \cap W\}| < \infty$ y además $(0,0) \in V \cap W$. Por lo tanto, $V \cap W \in B_{(0,0)} \subseteq \mathcal{B}$.

De esta forma se concluye que $\mathcal{B}$ es base para la topología generada por $\mathcal{B}$ (Teorema visto en clases).

ii) Sean $(n,m) \neq (k,l)$. Si ambos son distintos de $(0,0)$, $\{(n,m)\}$ y $\{(k,l)\}$ son abiertos disjuntos. Si $(k,l) = (0,0)$, basta considerar $V_1 = \{(n,m)\}$ y $V_2 = X \setminus \{(n,m)\}$, ambos abiertos y disjuntos. Por lo tanto X es Hausdorff.

iii) Sea $\{(n_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{(0,0)\}$. Encontraremos una vecindad V de $(0,0)$ que satisfice

$$\forall k_0 \in \mathbb{N}, \exists k \geq k_0, x_k \notin V$$

Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : n_k = N\}$ es infinito, tomamos $V = [(\mathbb{N} \setminus \{N\}) \times \mathbb{N}] \cup \{(0,0)\}$. Si se tiene lo contrario, es decir, para todo $N \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : n_k = N\}$ es finito, consideramos $V = X \setminus \{(n_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. En ambos casos $V \in B_{(0,0)}$ y satisfice la propiedad buscada. Por lo tanto $\{(n_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ no puede converger a $(0,0)$.

iv) Definiremos una sucesión que cubre todo $X \setminus \{(0,0)\}$:

$(n_0, m_0) = (1,0), (n_1, m_1) = (0,1), (n_2, m_2) = (2,0), (n_3, m_3) = (1,1), (n_4, m_4) = (0,2), \dots$ (como cuando se demuestra que $\mathbb{N}^2$ es numerable). Esta sucesión tiene a $(0,0)$ como punto de acumulación, en efecto, sea U una vecindad de $(0,0)$. Esto implica que existe $V \in B_{(0,0)}$ tal que $V \subseteq U$. Por definición existen $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0, (i_0, j) \in V$ y por construcción de $\{(n_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, para todo $k_0 \in \mathbb{N}$ existen $j \geq j_0$ y $k \geq k_0$ tales que $(n_k, m_k) = (i_0, j) \in V$, con lo que se concluye.