



EXAMEN

30 de julio de 2013

Tiempo: 3 horas

- P1.** (a) Usted posee 30 pares de calcetines sucios, y escoge 40 calcetines al azar para echar a lavar. Sea X la cantidad de calcetines limpios que quedan sin su pareja.
- 1) (1,0 pts.) Argumente por qué $\mathbb{P}(X = n) = 0$ cuando n es impar.
 - 2) (2,0 pts.) Calcule la distribución de X .
- (b) Todos las mañanas usted llega al paradero a las 8:20 para esperar el autobús que lo deja en el lugar donde usted realiza su práctica laboral. Hay dos líneas de autobuses que a usted le sirven: la A y la B , y usted subirá al primero que pase. Los tiempos que tardan los autobuses en pasar son variables exponenciales independientes de parámetros $\lambda_A = 1/10$ y $\lambda_B = 1/20$. El viaje en autobús toma exactamente 30 minutos para ambas líneas, y la hora de entrada de la práctica es a las 9:00.
- 1) (1,5 pts.) Sea T el tiempo que usted está en el paradero. Muestre que T es una variable exponencial de parámetro $3/20$.
 - 2) (1,5 pts.) La hora de llegada del jefe es una v.a. uniforme en el intervalo 8:50 y 9:10, independiente de T . Calcule la probabilidad de que el jefe lo sorprenda llegando tarde.

- P2.** Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) (1,5 pts.) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t} / (1 - b^2 t^2)$ para $|t| < 1/b$.
 - (b) (1,5 pts.) Calcule la esperanza y varianza de X .
 - (c) (1,5 pts.) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?
 - (d) (1,5 pts.) Suponga $\mu = 0$, y sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. proveniente de la distribución de X . Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de b , y pruebe que éste converge casi seguramente a b cuando $n \rightarrow \infty$.
- P3.** (a) Se sabe que la duración (en días) de una ampolla de la marca A es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda_A = 0,01$, mientras que una ampolla de la marca B tiene $\lambda_B = 0,0025$. Usted escoge al azar una ampolla de una de estas marcas, y después de 200 días de uso ésta sigue funcionando.
- 1) (1,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolla sea de la marca B ?
 - 2) (1,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolla funcione por otros 200 días?
- (b) Se dispone de una m.a.s. X_1, \dots, X_n proveniente de una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido. Sean $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ valores dados. Se plantean las hipótesis " $H_0 : \lambda = \lambda_0$ " y " $H_1 : \lambda = \lambda_1$ ".
- 1) (1,5 pts.) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \text{CTE}\}$. ¿Es uniformemente más potente entre todos los tests tales que $\lambda_1 > \lambda_0$?
 - 2) (1,5 pts.) Suponga que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $n = 25$, y que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando con un teorema adecuado, calcule el p -valor del test. Para $\alpha = 5\%$, ¿debe o no rechazarse H_0 ?