Problema

El dueño de una revista afirma que, de acuerdo a la experiencia de años anteriores, el 60 % de las personas suscritas a la revista renuevan su suscripción. En una muestra de 200 personas con suscripción, 108 de ellas la renovaron el último año. ¿Cuál es el p-valor asociado al test de que la probabilidad de renovar es distinta a la que indica la experiencia? Para un nivel de confianza del 2 %, ¿qué puede concluirse?

Solución

Llamemos $X_1, \ldots, X_n$, con $n = 200$, a las variables Bernoulli(p) que representan si cada persona renovó suscripción el último año, y definamos $\hat{p} = \bar{X}$. Sean

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 60\,\% \\ H_1 &: p \neq 60\,\%. \end{aligned}$$

Sea $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Trabajaremos con el estadístico

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}.$$

Bajo H_0, se tiene $p = 60\,\%$, con lo cual el valor observado del estadístico Z es

$$Z_{\text{obs}} = \frac{\frac{108}{200} - 60\,\%}{\sqrt{60\,\% \times 40\,\%/200}} = -\sqrt{3} = -1{,}732$$

El p-valor es la probabilidad, bajo H_0, de que Z sea tan o más extremo que el valor observado en la muestra, donde "extremo" significa en este caso $|Z| > |Z_{\text{obs}}|$ (por la forma de la hipótesis alternativa H_1). Usando el TCL para aproximar Z por una normal estándar, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= \mathbb{P}(|Z| > |Z_{\text{obs}}| \mid H_0) \\ &\approx \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > 1{,}732) \\ &= 2\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1{,}732) \\ &= 2 \times 4{,}18, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado una tabla de la normal. Por lo tanto el p-valor vale 8,36 %. Para un nivel de confianza del 2 %, esto no es suficiente, y no se rechaza la hipótesis nula.