Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5
Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Guía ejercicios 3

1. En una fiesta de año nuevo a la que usted asiste, se lanza al aire una gran cantidad de diminutos papeles blancos y rojos. Los papeles blancos provienen de un contenedor esférico, y los papeles rojos de una caja cúbica, de manera que el diámetro del contenedor esférico es igual a la arista de la caja (ambos poseen igual cantidad de papeles por cm^3). Al llegar a su casa usted se percata que adheridos a su ropa hay b papeles blancos y r papeles rojos. Argumente por qué $6b/r$ es una buena aproximación de π; explicite sus supuestos.

2. Se dispone de un piso de "parquet" con líneas paralelas a distancia $a > 0$. Se lanza una aguja de largo $l < a$ en el piso, de manera tal que la distancia X del centro de la aguja a la línea más cercana es una variable uniforme en $[0, a/2]$, y el ángulo Θ que forma la aguja con el eje perpendicular a las líneas es uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, independiente de X.
   a) Muestre que la aguja queda por sobre una línea si y sólo si $X \leq (l/2)\cos\Theta$.
   b) Muestre que la probabilidad de que la aguja quede por sobre una línea es $2l/(\pi a)$.
   c) Con los elementos descritos, diseñe un procedimiento para aproximar π.

3. Se dispone de 100 ampolletas cuyas duraciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media de 5 horas y varianza de 25. Suponga que al acabarse una ampolleta ésta es inmediatamente reemplazada por otra. Sea Y la variable correspondiente al tiempo que transcurre desde que se prende la primera ampolleta hasta que se termina la última.
   a) Muestre que Y tiene valor esperado igual a 500. Con esto, obtenga una cota para la probabilidad de que después de 525 horas aún haya al menos una ampolleta funcionando.
   b) Muestre que Y tiene raíz de la varianza igual a 50. Utilice esto para obtener una cota para la probabilidad de que se acaben las ampolletas entre las horas 400 y 600.
   c) Utilizando el TCL, obtenga una aproximación de la probabilidad de la parte (a).
   d) Suponga que se compran 50 ampolletas adicionales de otra marca, cuyas duraciones son variables aleatorias idénticamente distribuidas con media de 3 horas y varianza 22, independientes entre sí y de las ampolletas anteriores. Si estas ampolletas comienzan a utilizarse cuando se acaban las 100 primeras, ¿cuál es la probabilidad de que después de 700 horas aún haya al menos una ampolleta funcionando? Utilice el TCL.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con distribución común gamma(θ, λ). Calcule estimadores $\hat{\theta}$ y $\hat{\lambda}$ usando el método de los momentos.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con distribución común Poisson(λ). Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por $f(x) = rx^{r-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, donde $r > 0$ es un parámetro desconocido. Encuentre estimadores para r usando el método de máxima verosimilitud y de los momentos.

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una Gamma(θ, λ), donde $\theta > 1$ es conocido.
   a) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.
   b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.
   c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n\theta/(n\theta - 1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\tilde{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\tilde{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución Gamma$(n\theta, \lambda)$.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con densidad común dada por
$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   a) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_1$ mediante el método de los momentos.
   b) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_2$ mediante el método de máxima verosimilitud.
   c) Modifique $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para que sean insesgados.

9. Sea X variable aleatoria con densidad $f_X(x) = Cx^{r-1}\mathbf{1}_{[0,b]}(x)$, donde $C > 0$, $b > 0$ y $r > 0$ son constantes. Se sabe que $\mathbb{E}(X) = r/(r+1)$.
   a) Muestre que $C = r$ y $b = 1$.
   b) Dado $t > 0$, calcule $\mathbb{E}(X^t)$. Obtenga la varianza de X.
   c) Muestre que $-\ln(X)$ tiene distribución exponencial de parámetro r.
   d) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple proveniente de la distribución de X. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de r es $\hat{r} = -n/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$.
   e) Muestre que $\hat{r} \to r$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.

10. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:
$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$
Aproximando con el TCL, obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de cara p al 90 %.

11. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

12. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

13. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s^2 igual a 0,9.

    a) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

    b) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.

    c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?

    d) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

14. Considere una variable aleatoria X con densidad dada por $f_X(x) = Cxe^{-x/\theta}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$, donde C y θ son constantes.

    a) Muestre que $C = 1/\theta^2$.

    b) Muestre que $\mathbb{E}(X) = 2\theta$.

    c) Muestre que $\mathrm{var}(X) = 2\theta^2$.

    d) Considere una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de X. Calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ, y muestre que es insesgado.

    e) Suponga que el valor del estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ obtenido en una muestra de tamaño $n = 50$ es de 10,0. Obtenga un intervalo de confianza para θ al nivel 5 %. *Indicación:* aproxime utilizando el hecho que la cantidad $(\bar{X} - 2\theta)/(\hat{\theta}\sqrt{2/n})$ converge en distribución a una normal estándar cuando $n \to \infty$ (demuestre esta afirmación).

15. Para una distribución normal con esperanza μ y varianza $\sigma^2 = 25$, se desea realizar un test de las hipótesis $H_0 : \mu = 10$ versus $H_1 : \mu = 5$. Encuentre el tamaño n de la muestra tal que el test más potente tenga $\alpha = \beta = 0{,}025$, donde α y β son la probabilidad del error de tipo I y II, respectivamente.

16. Se dispone de una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido. Sean $\alpha = 5\,\%$, $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ valores dados. Se plantean las hipótesis

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$H_1 : \lambda = \lambda_1,$$

    a) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \textsc{Cte}\}$. ¿Es uniformemete más potente entre todos los tests tales que $\lambda_1 > \lambda_0$?

    b) Escriba esta región de rechazo de la forma

$$R = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\bar{x} - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \leq c \right\},$$

    donde c es una constante. Aproximando con un teorema adecuado, mueste que el valor de c tal que la probabilidad del error tipo I es igual al α especificado, corresponde a $c = -1{,}65$.

    c) De aquí en adelante suponga que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $n = 25$. Nuevamente aproximando con un teorema adecuado, calcule la potencia del test del ítem anterior.

    d) Suponga que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando nuevamente, calcule el p-valor del test. ¿Debe o no rechazarse H_0?

17. El voltaje de salida de un cierto circuito eléctrico debería ser 130 de acuerdo a las especificaciones técnicas. Se toma una muestra de 40 mediciones independientes del voltaje de este circuito, y se obtiene un promedio de 128,6 y una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 2,1. Realice un test a nivel 5 % para la hipótesis de que la esperanza del voltaje es igual a 130 versus la alternativa de que es menor estricto que 130. ¿Cuál es el p-valor del test?

18. Una empresa fabrica ciertas piezas cuyo grosor debería ser de 7cm. Debido a pruebas realizadas sobre la producción, existe la sospecha de que la máquina que produce las piezas esté defectuosa, haciendo que estas tengan un menor grosor del deseado. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_{25}$ de los grosores de estas piezas, tal que $\sum X_i = 172{,}508$ y su varianza muestral insesgada es $s^2 = 0{,}04$. Asuma además que el grosor de una pieza es una v.a. normal. Realice un test de hipótesis y calcule el p-valor. Indique su conclusión para un nivel de significación de $\alpha = 5\,\%$.

19. Una conocida marca de alimentos afirma que sus cajas de cereales contienen 50gr de almendras en promedio, pero usted sospecha que contienen estrictamente menos. Para verificar su afirmación, usted cuidadosamente separa las almendras de 9 cajas de cereales, y al pesarlas obtiene 49gr, 51gr, 46gr, 49gr, 51gr, 48gr, 51gr, 46gr y 50gr. Suponga que la variable en consideración tiene distribución normal con ambos parámetros desconocidos.

    a) Calcule el p-valor del test que resuelve su sospecha. Para un nivel de confianza del 5 %, ¿qué se puede concluir?

    b) En la caja de cereales se especifica que la raíz de la varianza de la cantidad de almendras es de 4gr, pero usted nuevamente sospecha que es estrictamente menor. ¿Cuál es el p-valor del test correspondiente? ¿Qué se concluye si se usa un nivel de confianza del 5 %?

20. Se afirma que el 2 % de los conductores olvida su licencia de conducir. Se toma una muestra de 100 conductores, y se observa que todos andan trayendo su licencia.

    a) ¿Cuál es el p-valor del test que contrasta la afirmación con la hipótesis de que menos del 2 % de los conductores olvidan su licencia?

    b) Para $\alpha = 2{,}28\,\%$, ¿cuál es la máxima cantidad de conductores adicionales que traen su licencia tal que la afirmación no se rechaza?