Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5
Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Guía ejercicios 2

1. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

2. Un estudiante debe llegar a su clase de las 8:30, para lo cual espera un autobús en el paradero. El autobús que pasa a las 7:30 tarda 40 minutos en llegar a la facultad, pero el autobús de las 7:40 tarda 50 minutos. Si el estudiante no alcanza el autobús de las 7:40, debe tomar el colectivo de las 7:45, que en 35 minutos lo deja en la facultad. Si la hora de llegada del estudiante al paradero se distribuye uniformemente entre las 7:25 y las 7:45, ¿cuál es el valor esperado de la hora de llegada a su clase?

3. *a)* Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.
   b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}(|X|)$.

4. Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$. Muestre que
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

5. Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

6. Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N. Se extraen bolitas con resposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k-1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k = 1, \ldots, N$. Deduzca la distribución de cada X_k, y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.

7. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X-\alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \text{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

8. La densidad de la variable aleatoria X es $f_X(x) = (ax + bx^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Se sabe además que el valor esperado de X es 0,6.
   a) Calcule a y b.
   b) Calcule F_X y $\mathbb{P}(X > 1/2)$.
   c) Calcule $\text{var}(X)$.

9. Se sabe que si dos variables son independientes, entonces su covarianza es 0. ¿Qué puede decir sobre la implicancia recíproca? *Indicación:* considere $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ y defina $Y = X^2$; muestre que $\text{cov}(X, Y) = 0$, pero X e Y no son independientes.

10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sea $Y = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Pruebe que $f_Y(y) = ny^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$, y calcule $\mathbb{E}(Y)$.

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por
$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$
Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

12. Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   a) Pruebe que la densidad de X es
$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$
   b) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^s) = e^{\mu s + \sigma^2 s^2/2}$. Obtenga la esperanza y varianza de X. *Indicación:* utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   c) Pruebe que la f.g.m. $M_X(t)$ vale ∞ para $t > 0$.
   d) Sea $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Pruebe que $V = \alpha + \beta U$ tiene distribución $\mathcal{N}(\alpha + \beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. Utilice esto para obtener la distribución de aX^b, donde $a > 0$ y $b \neq 0$.
   e) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución log-normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $Z = X_1X_2$?

13. Sea X variable aleatoria con distribución *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $X \sim \chi^2_n$, es decir, su densidad está dada por
$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$
donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz$ es la función Gamma.
   a) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}$ para $t < 1/2$.
   b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\text{var}(X)$.
   c) Si Y es una variable normal estándar, muestre que $Y^2 \sim \chi^2_1$. Utilice el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
   d) Concluya que si $X_1, \ldots, X_n$ son normales estándar independientes, entonces $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ tiene distribución χ^2_n. *Indicación:* utilice las propiedades de la f.g.m.

14. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2+1}$$

para todo x e y.

 a) ¿Son independientes? Explique.
 b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y?

15. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

 a) ¿Son independientes? ¿Qué tipo de variables son?
 b) Dado $\alpha > 0$, muestre que $\mathbb{P}(Y \geq \alpha X) = 1/(1+\alpha)$.
 c) Determine la función de distribución acumulada de la variable $X/(X+Y)$. ¿Qué tipo de variable es?

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

17. Sean $X \sim \text{unif}(0,1)$, $Y \sim \exp(1)$ variables independientes. Sean $U = X + Y$, $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1 + 1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

18. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

19. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

 a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.
 b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
 c) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$.

20. Usted sale de su casa a las 8:00, y debe llegar a la universidad a más tardar a las 8:30. Si usted se siente con energía, viaja en bicicleta, y el tiempo de viaje (en minutos) es una variable uniforme en $[25, 35]$. Si no se siente con energía, usted espera el autobús, que tarda en llegar al paradero un tiempo distribuido uniformemente en el intervalo $[0, 20]$ (independiente del tiempo de viaje en bicicleta), y lo deja en la universidad luego de 25 minutos de viaje. Suponga que la probabilidad de sentirse con energía es $p = 0{,}75$.

 a) ¿Cuál es la probabilidad de que usted llegue a la hora?
 b) Si usted llegó atrasado, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?
 c) Calcule la esperanza de la hora de llegada a la universidad.

21. Se lanza n veces de manera independiente una moneda con probabilidad p de cara, donde p es el resultado de la realización de otra variable aleatoria U con distribución unif$(0,1)$, independiente de los lanzamientos. Sea X la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo $i = 0, \ldots, n$ se tiene que $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ condicionando en los posibles resultados de U; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

22. Sea $\vec{X} = (X, Y)$ un vector normal bivariado, y sean $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Muestre que $\vec{Y} = \vec{b} + A\vec{X}$ también es un vector normal bivariado.

23. Sea $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ un vector normal multivariado en $\mathbb{R}^n$. Sean $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^k$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, y definamos $\vec{Y} = \vec{\nu} + B\vec{X}$. Muestre que $\vec{Y}$ también es un vector normal multivariado y encuentre sus parámetros.

24. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector normal multivariado. Muestre que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes si y sólo si $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\forall i \neq j$.

25. En un banco llegan clientes siguiendo un proceso de Poisson con tasa de 3 clientes por minuto. Además, cada una de las 4 cajas disponibles atiende clientes siguiendo un proceso de Poisson (independiente a la llegada de los clientes al banco y de las otras cajas), de manera que el valor esperado del tiempo que un cliente tarda en una caja es de 2 minutos.

 a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 2 minutos lleguen exactamente 4 clientes?
 b) ¿Cuál es la tasa de atención conjunta de las cajas?
 c) Suponga que surge una falla en el sistema computacional del banco, por lo cual las cajas dejan de atender clientes. El tiempo que tarda el sistema en volver a funcionar es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}2$. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de clientes que llegan al banco durante la falla del sistema?

26. Un cazador sabe que en el sector que él caza se avistan pájaros a tasa de λ pájaros por hora.

 a) Calcule la probabilidad que el cazador aviste más de M pájaros en 1 hora.
 b) Suponga ahora que el cazador caza a un pájaro avistado con probabilidad p. Calcule la probabilidad que cace exactamente k pájaros en t horas. *Indicación:* Condicione en el número de pájaros avistados.
 c) Llamemos N_t a la cantidad de pájaros cazados hasta el tiempo t. En base a lo obtenido en el ítem anterior, ¿qué puede decir acerca de $(N_t)_{t\geq 0}$?