Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta control 1

P1. (a) Llamemos A_i al evento en que el avión está en la zona i, y E_i al evento en que el avión es encontrado en la zona i, para $i = 1, 2, 3$.

1) Sea E el evento en que el avión es encontrado. Los E_i son disjuntos, por lo cual tenemos:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3).$$

Calculemos $\mathbb{P}(E_i)$ condicionando en A_i:

$$\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i|A_i)\mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(E_i|A_i^c)\mathbb{P}(A_i^c) = \alpha_i \frac{1}{3} + 0\frac{2}{3} = \frac{\alpha_i}{3}.$$

Luego, la probabilidad de encontrar el avión es $\mathbb{P}(E) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2)/3$.

2) Queremos calcular $\mathbb{P}(A_i|E_1^c)$ para $i = 1, 2, 3$. Por regla de Bayes, tenemos para $i = 1$:

$$\mathbb{P}(A_1|E_1^c) = \mathbb{P}(E_1^c|A_1)\frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(E_1^c)} = (1-\alpha_1)\frac{1/3}{1-\alpha_1/3} = \frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}.$$

Para $i \neq 1$, se cumple que la probabilidad de no encontrar al avión en la zona 1, dado que está en la zona i, es 1. Entonces, por regla de Bayes:

$$\mathbb{P}(A_i|E_1^c) = \mathbb{P}(E_1^c|A_i)\frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(E_1^c)} = 1\frac{1/3}{1-\alpha_1/3} = \frac{1}{3-\alpha_1}.$$

(b) 1) Notemos que cada uno de los 2^n subconjuntos de S es igualmente probable. Siguiendo la indicación, para calcular lo deseado condicionamos en la cantidad de elementos de B utilizando la regla de probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(A \subseteq B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A \subseteq B \mid |B| = k)\mathbb{P}(|B| = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{2^n} \times \frac{\binom{n}{k}}{2^n},$$

donde hemos utilizado que existen existen 2^k subconjuntos de B cuando $|B| = k$, y que existen $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k. Desarrollando lo anterior utilizando el teorema del binomio de Newton, otenemos lo deseado:

$$\mathbb{P}(A \subseteq B) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} = \frac{1}{4^n}(2+1)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

2) Siguiendo la indicación, notemos que $AB = \emptyset$ si y sólo si $A \subseteq B^c$. Dado que la aplicación que a un subconjunto de S le asocia su complemento es biyectiva, se tiene que B^c también puede verse como escoger un subconjunto al azar de manera equiprobable entre todos los subconjuntos de S, de manera independiente de A. Aplicando la parte anterior, se concluye:

$$\mathbb{P}(AB = \emptyset) = \mathbb{P}(A \subseteq B^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

P2. (a) 1) Para obtener el valor de C imponemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. Notando que f_X vale 0 fuera del intervalo $[-1, 1]$, tenemos:

$$1 = \int_{-1}^{0} C dx + \int_{0}^{1} 2C dx = C + 2C,$$

de donde se concluye que $C = 1/3$.

2) Recordemos que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$. Si $x < -1$, $f_X(y) = 0$ para todo $y \in (-\infty, x]$, luego la integral anterior es 0 y entonces $F_X(x) = 0$. Para $x \in [-1, 0)$, tenemos:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} C dy = C(x+1).$$

Por otro lado, si $x \in [0,1]$, se tiene:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{0} C dy + \int_{0}^{x} 2C dy = C + 2Cx.$$

Por último, si $x > 1$ entonces $F_X(x) = \int_{-1}^{1} f_X(y)dy = 1$. En resumen, la función F_X viene dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ (1+x)/3 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ (1+2x)/3 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3) Calculemos F_Y. Primero notemos que si $y < 0$ entonces $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$, pues como Y es el valor absoluto de X, sólo toma valores no-negativos. Para $y \geq 0$ tenemos:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} f_X(x)dx.$$

Notemos que si $y > 1$, entonces el intervalo $[-y, y]$ contiene a $[-1, 1]$ y luego la integral anterior vale 1, es decir, $F_Y(y) = 1$. Si $0 \leq y \leq 1$ separamos la integral anterior en dos y obtenemos:

$$F_Y(y) = \int_{-y}^{0} C dx + \int_{0}^{y} 2C dx = Cy + 2Cy,$$

es decir $F_Y(y) = y$ para todo $y \in [0,1]$. Por lo tanto, la función F_Y coincide con la distribución acumulada de una variable uniforme en $[0,1]$, lo cual significa que $Y \sim \text{unif}(0,1)$.

(b) Debemos probar que μ_X cumple los axiomas de probabilidad. Es claro que para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumple $\mu_X(A) \in [0,1]$, pues $\mathbb{P}(E) \in [0,1]$ para todo evento E, en particular para $E = X^{-1}(A)$. También es claro que $\mu_X(\mathbb{R}) = 1$, pues $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$ y ya sabemos que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Con lo anterior se tiene que μ_X satisface los axiomas 1 y 2, sólo falta verificar el axioma 3. Consideremos entonces una colección $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos de a pares y probemos que μ_X de la unión de ellos es la suma de los $\mu_X(A_n)$. Para ello, notemos que los eventos $(X^{-1}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también son disjuntos de a pares, debido a las buenas propiedades de la pre-imagen. En efecto: para $n \neq m$ se tiene

$$X^{-1}(A_n) \cap X^{-1}(A_m) = X^{-1}(A_n \cap A_m) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Con esto, y utilizando nuevamente las buenas propiedades de la pre-imagen, tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(A_n), \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos utilizado el hecho que $\mathbb{P}$ es una probabilidad sobre Ω. Lo obtenido prueba que μ_X satisface también el axioma 3 y concluye que μ_X es una probabilidad sobre $\mathbb{R}$.

P3. (a) 1) El experimento de lanzar 5 dados indistinguibles equivale a ubicar 5 bolitas indistinguibles en 6 urnas distinguibles: cada bolita representa un dado, y cada urna representa una de las 6 caras. Como la cantidad de posibles resultados de este último experimento es conocida, la cantidad buscada es entonces

$$\binom{5+6-1}{6-1} = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 252.$$

Estos resultados no son equiprobables, pues por ejemplo el resultado ⚅⚅⚅⚅⚅ puede ocurrir de una sola forma: todos los dados resultan en ⚅; sin embargo el resultado ⚅⚅⚅⚅⚄ puede ocurrir de 5 formas, pues el ⚄ puede haber ocurrido en cualquiera de los 5 dados.

2) Trabajamos en el espacio equiprobable {⚀,⚁,⚂,⚃,⚄,⚅}^{5}, el cual posee 6^5 elementos. Para calcular la probabilidad deseada separamos los casos favorables según la cantidad de comodines obtenida:

$$\#\text{casos favorables} = \binom{5}{5} + \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} \times 5.$$

El $\binom{5}{k}$ corresponde a la cantidad de formas en que se pueden escoger k de los 5 dados que resultan en comodín; el 5 que aparece multiplicando corresponde a la cantidad de formas en que se pueden escoger los $5-k$ dados restantes: una por cada cara distinta del comodín. El $\binom{5}{5}$ inicial corresponde al caso en que todos los dados resultan en comodín. Desarrollando lo anterior, tenemos:

$$\#\text{casos favorables} = 1 + 5 \times \left(-1 + \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}\right) = 1 + 5 \times (-1 + 2^5) = 156.$$

Luego, la probabilidad buscada es $156/6^5$.

(b) 1) Como F es la distribución acumulada de X, se tiene que $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Además, notemos que el evento $\{X \leq a_i\}$ es la unión disjunta de $\{X \leq a_{i-1}\}$ y $\{a_{i-1} < X \leq a_i\}$, de modo que $\mathbb{P}(X \leq a_i) = \mathbb{P}(X \leq a_{i-1}) + \mathbb{P}(a_{i-1} < X \leq a_i)$. Con esto, tenemos:

$$p_i = \mathbb{P}(a_{i-1} < X \leq a_i) = \mathbb{P}(X \leq a_i) - \mathbb{P}(X \leq a_i) = F(a_i) - F(a_{i-1}).$$

2) Etiquetamos los puntos de 1 a m. Escogemos k_1 puntos que caerán en I_1, k_2 que caerán en I_2, y así sucesivamente hasta escoger k_{n+1} que caerán en I_{n+1}, lo cual sabemos que puede hacerse de $\binom{m}{k_1,\ldots,k_{n+1}}$ formas. Después, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, pedimos que los k_i puntos escogidos para caer en I_i efectivamente caigan allí, lo cual ocurre con probabilidad $p_i^{k_i}$ por independencia. Como esto se hace para todo i, la probabilidad de que los m puntos caigan en el intervalo que les fue asignado a cada uno es $p_1^{k_1} \cdots p_{n+1}^{k_{n+1}}$, nuevamente por independencia. Así, la probabilidad buscada corresponde a

$$\binom{m}{k_1, \ldots, k_{n+1}} p_1^{k_1} \cdots p_{n+1}^{k_{n+1}}.$$