Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 10 - Esperanza Condicional y Convergencia

16 de mayo de 2013

Problema 1 [Desigualdad de Chebyshev[1]].-

1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con $X_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Sea $\varepsilon > 0$, fijemos $N \in \mathbb{N}$ y definamos $X := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$. Encuentre N tal que $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2}$.

2. Sean $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. independientes, donde $T_n \sim exp(\lambda n)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ y definamos $T := \sum_{n=1}^{N} T_n$, $b_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$. Muestre que

$$\mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| \geq k) \leq \frac{b_N^2}{k^2\lambda^4} \leq \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 \frac{1}{k^2\lambda^4}$$

Problema 2 [Ley de Esperanzas Anidadas].- Sean X e Y dos v.a. discretas, ambas con esperanza finita, muestre que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Problema 3 [Poisson Condicional].- En un sistema hay dos tipos de partículas. La cantidad de partículas del primer tipo es una v.a. $X \sim Poiss(\lambda)$, mientras que las del segundo tipo es $Y \sim Poiss(\mu)$.

1. Sabiendo que la suma de ambas partículas es k, ¿cuál es la probabilidad de que hayan j partículas del tipo 1?.

2. Calcule $\mathbb{E}(X|X+Y=k)$.

3. Use lo anterior y la ley de esperanzas anidadas para calcular $\mathbb{E}(X)$.

Problema 4 [Utilidad Condicional].- Una empresa vende combustible, donde el precio es una v.a. $Y \sim U(0,1)$. Hay un solo cliente, el que comprará una cantidad $X \sim exp(\lambda)$. Determine el ingreso esperado de la empresa sabiendo que condicional en $Y = y$, X distribuye exponencial de parámetro λy.

Problema 5 [Error de Medición].- Considere que se está midiendo un experimento, el error de medición es una v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. La variable que se quiere medir es Y, se sabe que la densidad conjunta está dada por la expresión

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2|x|} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\{-|x|\leq y\leq |x|\}}$$

Dado que se observó $X = 1$ obtenga el valor esperado de Y, es decir, $\mathbb{E}(Y|X=1)$. Interprete su resultado en términos de la independencia de las v.a.

[1] Pronúnciese Chebihshyov