Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 9 - Preparación Control 2

10 de mayo de 2013

Problema 1 [Geometría e Independencia].- Considere un triángulo rectángulo de catetos de lado 1 centrado en el origen. Se elige un punto totalmente al azar en dicho triángulo. Llamemos X, Y a las coordenadas del punto sorteado.

1. Estudie la independencia entre X e Y.
2. Obtenga la densidad condicional de X dado Y y la de Y dado X, interprete.
3. Calcule la varianza de X, interprete su resultado.
4. Calcule la covarianza entre X e Y, interprete.
5. (Desafío) Llamemos L al largo del vector (X, Y). Encuentre la ley de L.

Problema 2 [Utilidad Divisible].- Una empresa que vende combustible tiene una cantidad de 1[L] en inventario. Hay dos clientes, primero llega uno y pide una cantidad X luego llega el segundo que pide una cantidad Y, donde las v.a. X, Y son independientes y ambas con densidad $f_X(x) = 2x\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}$.

1. Sabiendo que el precio del litro es de $1[u.m.]$, defina U como la utilidad de la empresa y calcule $\mathbb{P}(U = 1)$.
2. Calcule $\mathbb{P}(U < u)$ para $u \in (0, 1)$.

Problema 3 [Distribución Beta].- Decimos que X sigue una distribución Beta de parámetros α y β, lo que denotamos $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, si su densidad se escribe de la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}$$

Considere $X \sim Beta(\alpha, \beta)$.

1. Encuentre la distribución de $1 - X$.
2. Sea $Y \sim Beta(1, 1)$, con $Y \perp\!\!\!\perp X$, encuentre la probabilidad de que $1 - X$ sea mayor que Y

Nota: Esta distribución es muy útil en estimación bayesiana, pues ajusta muchas formas, de hecho su nombre griego β viene de "versatilidad".