Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 12 - Estimación Puntual

6 de junio de 2013

Problema 1 [Muestreos Aleatorios Simples].- Se tiene una población de N individuos y se quiere realizar un muestreo de una característica. Se pide determinar cual de los siguientes procedimientos garantiza obtener un m.a.s.

1. Para cada individuo se lanza una moneda, si resulta cara se muestrea la característica de tal individuo, si sale cruz no.
2. Enumerar a cada individuo y hacer m veces lo siguiente: elegir un número completamente al azar entre 1 y N (se sortea un individuo) luego lanzar una moneda, si sale cara tomar el dato del individuo, si es cruz no.
3. Ordenar totalmente al azar a los individuos y elegir a los m primeros.

Nota: Uno de los supuestos más importantes que nos damos al estudiar estadística es que somos capaces de generar muestreos aleatorios simples ¿qué tan fácil es lograrlo?.

Problema 2 [Modelo Potencia] Considere un m.a.s. $X_1, \cdots, X_n$ de la distribución

$$f(x|\alpha,\theta) = \frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq\theta\}}$$

1. Demuestre que el momento de orden k para X es $\frac{\alpha+1}{\alpha+k+1}\theta^k$
2. Suponga que α es conocido. Demuestre que el estimador $\hat{\theta}$ de θ es consistente, donde:

$$\hat{\theta} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\bar{X}$$

Problema 3 [Parametrizando Adecuadamente].- Considere la variable aleatoria exponencial, de la que se quiere estimar su parámetro puntualmente. Se cuenta con un m.a.s. $X_1, \cdots, X_n$.

1. Escriba el modelo paramétrico, eligiendo para ello una parametrización tal que $\mathbb{E}(X_1) = \lambda$.
2. Estudie la consistencia de $\hat{\lambda}_1$ dado por el promedio empírico.
3. Estudie el sesgo de los estimadores:

$$\hat{\lambda}_2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \qquad \hat{\lambda}_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

4. (Desafío) Decimos que el estimador $\hat{\theta}_1$ es mejor que $\hat{\theta}_2$ si $\hat{\theta}_1$ es insesgado y tiene menor varianza que $\hat{\theta}_2$. ¿Es posible encontrar a partir de $\hat{\lambda}_2$ un estimador mejor que $\hat{\lambda}_1$?

Nota: La forma en que se escribe la densidad de una v.a. afecta directamente los cálculos, lo que nos dice que modelando adecuadamente es posible tener mejores aproximaciones.