Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Pauta Clase Auxiliar 9

Problema 3 [Distribución Beta].- Decimos que X sigue una distribución Beta de parámetros α y β, lo que denotamos $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, si su densidad se escribe de la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}$$

Considere $X \sim Beta(\alpha, \beta)$.

1. Encuentre la distribución de $1 - X$.
2. Sea $Y \sim Beta(1, 1)$, con $Y \perp\!\!\!\perp X$, encuentre la probabilidad de que $1 - X$ sea mayor que Y

Solución:
1. Sea $T := 1 - X$ y tomemos un $t \in (0, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F_T(t) &\triangleq \mathbb{P}(T \leq t) \\ &= \mathbb{P}(1 - X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(1 - t \leq X) \\ &= \int_{1-t}^{1} f_X(x)dx \end{aligned}$$

Ahora para obtener $f_T(t)$ usamos el TFC:

$$\frac{dF_T}{dt} = -f_X(1-t)\cdot -1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Reconociendo términos se concluye que $T \sim Beta(\beta, \alpha)$.

2.
Partimos recordando que $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$
Escribimos la densidad de Y como

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(1+1)y^{1-1}(1-y)^{1-1}}{\Gamma(1)\Gamma(1)}\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 1\}} = \mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 1\}}$$

por lo que $Y \sim U(0, 1)$.

Ahora calculamos lo pedido:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1-X \geq Y) &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} f_{XY}(x,y)dydx \\
\text{(independencia)} \quad &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 1\}}dydx \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{y=0}^{1-x} dydx \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)dx \\
&= \int_{0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}dx \\
\text{(ni quita ni pone)} \quad &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_{0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}dx
\end{aligned}$$

Por sanidad mental definamos $\tilde{\beta} := \beta+1$, si reemplazamos tenemos

$$\mathbb{P}(1-X \geq Y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_{0}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\tilde{\beta})x^{\alpha-1}(1-x)^{\tilde{\beta}-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tilde{\beta})}dx$$

El término de la integral es la densidad de una v.a. $Beta(\alpha,\tilde{\beta})$, por lo que integrada en todo su dominio debe valer 1, por lo tanto la probabilidad pedida es:

$$\mathbb{P}(1-X \geq Y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

La última expresión se puede reducir más, pero no es el objetivo de este problema.