



Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística Clase Auxiliar 8 - Vectores Aleatorios

9 de mayo de 2013

Problema 1 [Cambio de Variable].- Sea (X, Y) el vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbb{1}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}$$

1. Dé la densidad conjunta de $U = XY$ y $V = X/Y$.
2. Estudie la independencia de U y V .

Problema 2 [Densidad Condicional].- Considere un trabajo que va a ser procesado en una máquina. Si el desgaste de la máquina es y , entonces el trabajo se demorará un tiempo $X \sim U(0, y)$. Suponga que el desgaste de la máquina es a su vez una v.a. Y con densidad $f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \mathbb{1}_{\{y > 1\}}$.

1. Plantee la densidad conjunta de X e Y .
2. Obtenga la densidad marginal de X .
3. Calcule $\mathbb{E}(X)$, interprete su resultado y deduzca $\mathbb{E}(Y)$.

Problema 3 [Utilidad Divisible].- Una empresa que vende combustible tiene una cantidad de 1[L] en inventario. Hay dos clientes, primero llega uno y pide una cantidad X luego llega el segundo que pide una cantidad Y , donde las v.a. X, Y son independientes y ambas con densidad $f_X(x) = 2x \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$.

1. Sabiendo que el precio del litro es de 1[u.m.], defina U como la utilidad de la empresa y calcule $\mathbb{P}(U = 1)$.
2. Calcule $\mathbb{P}(U < u)$ para $u \in (0, 1)$.

Problema 4 [Distribución Beta].- Decimos que X sigue una distribución Beta de parámetros α y β , lo que denotamos $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, si su densidad se escribe de la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta) x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$$

Considere $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

1. Encuentre la distribución de $1 - X$.
2. Sea $Y \sim \text{Beta}(1, 1)$, con $Y \perp X$, encuentre la probabilidad de que $1 - X$ sea mayor que Y