



Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística

Clase Auxiliar 7 - Variables Aleatorias Continuas

2 de mayo de 2013

Problema 1 [Duración y Calidad].- Una empresa fabrica ampollitas, con probabilidad $p \in (0, 1)$ ésta será de buena calidad y durará un tiempo uniformemente distribuido en $[0, 10]$, pero con probabilidad $1 - p$ tendrá una falla y durará un tiempo uniformemente distribuido en $[0, 1]$.

1. Pepito compró una ampollita, defina T como el tiempo que durará y encuentre su distribución.
2. Calcule $\mathbb{E}(T)$ e interprete.
3. Si la ampollita lleva funcionando un tiempo r , ¿cuál es la probabilidad de que sea una de mala calidad?

Problema 2 [Bienes Sustitutos].- Considere el consumo de dos bienes, que denotaremos X e Y . La densidad conjunta está dada por $f_{XY} = (x + y)\mathbb{1}_{\{0 < x, y < 1\}}$.

1. En la auxiliar anterior vimos que $F_{XY}(x, y) = \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x$, explique porqué estos bienes pueden ser considerados sustitutos.
2. Estudie la independencia de las v.a.
3. Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.
4. ¿Cuál es la probabilidad que el bien 1 se consuma más de $\frac{1}{2}$?
5. Sabiendo que el bien 2 se consume más de $\frac{1}{2}$, calcule la probabilidad de que el bien 1 se consuma más de $\frac{1}{2}$. Interprete su resultado.
6. Calcule $\text{Var}(X)$, interprete su resultado.

Problema 3 [Utilidad Divisible].- Una empresa que vende combustible tiene una cantidad de 1[L] en inventario. Hay dos clientes, primero llega uno y pide una cantidad X luego llega el segundo que pide una cantidad Y , donde las v.a. X, Y son independientes y ambas con densidad $f_X(x) = 2x\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$.

1. Sabiendo que el precio del litro es de 1[u.m.], defina U como la utilidad de la empresa y calcule $\mathbb{P}(U = 1)$.
2. Calcule $\mathbb{P}(U < u)$ para $u \in (0, 1)$.

Problema 4 [Geometría e Independencia].- Considere un triángulo rectángulo de catetos de lado 1. Se elige un punto totalmente al azar en dicho triángulo. Llamemos X, Y a las coordenadas del punto sorteado.

1. Estudie la independencia entre X e Y .
2. Calcule la covarianza entre X e Y , interprete.
3. (Desafío) Llamemos L al largo del vector (X, Y) . Encuentre la ley de L .

Problema 5 [Distribución Beta].- Decimos que X sigue una distribución Beta de parámetros α y β , lo que denotamos $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, si su densidad se escribe de la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$$

Considere $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

1. Encuentre la distribución de $1 - X$.
2. Sea $Y \sim \text{Beta}(1, 1)$, con $Y \perp\!\!\!\perp X$, encuentre la probabilidad de que $1 - X$ sea mayor que Y