Universidad De Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 6 - Variables Aleatorias Continuas

25 de abril de 2013

Problema 1 [Supervivencia].- En el CMM hay una máquina de café, llamemos T al tiempo que está funcionando sin problemas si empezamos a observar desde ahora ($t = 0$), suponga que $T \sim exp(\lambda)$. Los profesores se enojarán si la máquina se descompone antes de t'.

1. Calcule la probabilidad de que los profesores se enojen.
2. Ahora suponga que hay una segunda máquina, su tiempo de vida distribuye exponencial de parámetro μ (independiente de la primera máquina). Ahora los profesores se enojarán si alguna de las máquinas falla antes de t', calcule la probabilidad de este evento. Interprete su resultado.
3. En el escenario anterior, suponga ahora que los profesores no se enojan mientras alguna de las máquinas dure más de t', calcule la probabilidad de que se enojen. Interprete su resultado.

Problema 2 [Bienes Sustitutos].- Considere el consumo de dos bienes, que denotaremos X e Y. La densidad conjunta está dada por $f_{XY} = c(x + y)\mathbb{1}_{\{0<x,y<1\}}$.

1. Calcule la función de distribución conjunta, explique porqué estos bienes pueden ser considerados sustitutos. Encuentre el valor de c.
2. Estudie la independencia de las v.a.
3. Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.
4. ¿Cuál es la probabilidad que el bien 1 se consuma más de $\frac{1}{2}$?
5. Sabiendo que el bien 2 se consume más de $\frac{1}{2}$, calcule la probabilidad de que el bien 1 se consuma más de $\frac{1}{2}$. Interprete su resultado.
6. Calcule $\mathbb{V}ar(X)$, interprete su resultado.

Problema 3 [Distancia de Viaje].- Hay un bus que va de la ciudad A a la B, debe recorrer una distancia de $L[km]$ y con probabilidad p tendrá una falla mecánica. De tener una falla, ésta ocurre en cualquier tramo del viaje con igual probabilidad y los pasajeros deberán caminar desde el lugar de la falla hasta la ciudad B.

1. Asuma $p = 1$, defina X como la v.a. que dice cuanto deberán caminar los pasajeros, dé su ley y calcule su esperanza.

2. Ahora asuma $p \in (0,1)$, sea Y la v.a. que dice cuanto caminarán los pasajeros. Dé la función de distribución de Y y de ser posible calcule su densidad.

3. En el caso $p = 1$, ahora hay un segundo bus que sale de B y va a buscar a los pasajeros (para llevarlos a B). Si éste bus sale a penas el primero tiene la falla y viaja a velocidad constante $v[km/h]$, defina T como el tiempo que esperan los pasajeros en la carretera y dé su densidad.

Problema 4 [Geometría e Independencia].- Considere un triángulo rectángulo de catetos de lado 1. Se elige un punto totalmente al azar en dicho triángulo. Llamemos X, Y a las coordenadas del punto sorteado.

1. Estudie la independencia entre X e Y.

2. Calcule la covarianza entre X e Y, interprete.

3. (Desafío) Llamemos L al largo del vector (X, Y). Encuentre la ley de L.

Problema 5 [Distribución Beta].- Decimos que X sigue una distribución Beta de parámetros α y β, lo que denotamos $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, si su densidad se escribe de la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}$$

Considere $X \sim Beta(\alpha, \beta)$.

1. Encuentre la distribución de $1 - X$.

2. Sea $Y \sim Beta(1, 1)$, con $Y \perp\!\!\!\perp X$, encuentre la probabilidad de que $1 - X$ sea mayor que Y