Universidad De Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Daniel Remenik
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 3 - Variables Aleatorias

4 de abril de 2013

Problema 1 [Uniforme Discreta].- Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo y considere la v.a. que sigue la ley

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N} \quad k \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

1. Calcule la función de distribución de X y grafíquela. ¿Puede pensar en un experimento que de origen a ésta v.a.?
2. Calcule $\mathbb{E}(X)$, interprete su resultado cuando $N \to \infty$.

Problema 2 [Monedas Perfectas].- Se tiene una moneda que al lanzarla puede salir cara o sello con la misma probabilidad, pero con probabilidad $\varepsilon \in (0, 1)$ sale en canto. Se toma la moneda y se hace el experimento de lanzarla indefinidamente hasta que caiga de canto.

1. ¿Cuál es el número esperado de tiradas que hay que realizar para observar que caiga de canto por primera vez?
2. ¿Cuántas tiradas hay que realizar para que con probabilidad 0.9 haber finalizado el experimento?
3. Suponga ahora que se tiene otra moneda equilibrada que nunca sale de canto. Al principio del experimento se elige una moneda completamente al azar y esta se tira indefinidamente hasta observar una realización de canto. Si se llevan n tiradas sin éxito, ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido la moneda que puede salir de canto?

Problema 3 [Modelando Precios].- El valor de la acción de una compañía cada día es independiente de los días anteriores, puede valer $1, 2, \cdots, 10$ equiprobablemente o bien puede ser mayor a 10 con probabilidad $\varepsilon \in (0, 1)$. Decimos que la economía anda lenta si el valor es 2 o menor; regular si el valor está entre 3 y 7; buena si vale más de 7. Considere la variable aleatoria dada por:

$$X := \begin{cases} 0 & \text{si la economía está lenta} \\ 1 & \text{si está regular} \\ 2 & \text{si está buena} \end{cases}$$

1. Calcule $\mathbb{P}(X = 0)$ y $\mathbb{P}(X \geq 1)$, identifique el conjunto Ω de observaciones posibles.
2. Considere a un inversionista supersticioso, Pepito, que cada día venderá acciones solo si la economía está regular ó buena y además si lanza una moneda y ésta aterriza en cara. Para colmo la moneda de Pepito está cargada y se obtiene cara con probabilidad p. Calcule la probabilidad de que: (i) pepito venda acciones hoy, (ii) que venda acciones en un horizonte de n días, (iii) que venda acciones en algún momento de su vida.

Problema 4 [Juegos Justos].- Diremos que un juego de apuestas es justo si $\mathbb{E}(U) \geq 0$ donde U es la utilidad. Diremos también que un juego de azar entre n jugadores es justo si la probabilidad de ganar es $\frac{1}{n}$.

1. Considere el juego de apuestas de lanzar una moneda hasta que salga cara. Si la primera cara ocurre en el lanzamiento i se paga al apostante $p^{-i}[u.m.]$ donde p es la probabilidad de que la moneda aterrice en cara. Digamos que para poder jugar se debe pagar c ¿es éste un juego justo?

2. Considere ahora el juego de azar entre Natalia y Alejandra: cada una lanza un dado de 3 caras y la que obtenga el mayor número gana. En caso de empate se vuelve a lanzar hasta que haya solo un número más alto. Demuestre que es un juego justo.

Nota: Observe que el la segunda parte de este problema hemos probado que la probabilidad de que "jueguen hasta el infinito" es cero.

Problema 5 [Reparticiones Cargadas].- Sea $\frac{1}{2} < p < 1$ y considere una mamá que tiene 2 hijos, A y B. Cada día la mamá compra un regalo, se lo da a su hijo favorito (A) con probabilidad p y a su otro hijo con probabilidad $1 - p$, cada día lo hace de forma totalmente independiente. Sea X la v.a. que dice el número de regalos que ha recibido A hasta el día N, con $N \in \mathbb{N}$ fijo.

1. Dé la ley de y calcule la esperanza de X.

2. Suponga ahora que el papá también lleva regalos y que los da de igual forma que la mamá, pero con parámetro $\frac{1}{2} < q < 1$ (A también es su favorito). Calcule ahora $\mathbb{E}(X)$

3. Sea Y la v.a. que dice el número de regalos que ha recibido B, dé $\mathbb{E}(Y)$ para los dos casos anteriores.