MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2013-01
Profesor: Raúl Manásevich.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Matías Yáñez Quezada.

Clase auxiliar 05
19/abril

Método de coeficientes indeterminados Sirve para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes dada por

$$\sum_{j=0}^{n} A_j y^{(j)}(x) = q(x) \tag{1}$$

donde $q(x)$ necesariamente es una función de la forma

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha_j x}(P_j(x)\cos(\beta_j x) + Q_j(x)\sin(\beta_j x))$$

y $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^n$ son constantes y $\{P_j(x), Q_j(x)\}_{j=0}^n$ polinomios.

Aplicación

1. Encontrar la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de la solución homogénea $y_h(x)$.
2. Determinar el anulador de $q(x)$.
3. Aplicar el anulador en (1) y resolver la ecuación homogénea resultante.
4. La solución de esta nueva ecuación tendrá por base a $\{y_1, \ldots, y_m\}$, con $m > n$. Luego $\{y_{n+1}, \ldots, y_m\}$ será la base de la solución particular $y_p(x)$ de (1), es decir $y_p(x) = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{m} d_j y_j(x)$.
5. Para determminar las constantes $\{d_{n+1}, \ldots, d_m\}$ se reemplaza $y_p(x)$ en (1).

Anuladores Para $n \in \mathbb{N}^*$ y a, b constantes no nulas, se tiene

Familia de funciones	Polinomio anulador
$\{e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\}$	$(D-a)^n$
$\{e^{ax}\cos(bt), xe^{ax}\cos(bt), \ldots, x^{n-1}e^{ax}\cos(bt)\}$	$(D^2 - 2aD + (a^2+b^2))^n$
$\{e^{ax}\sin(bt), xe^{ax}\sin(bt), \ldots, x^{n-1}e^{ax}\sin(bt)\}$	$(D^2 - 2aD + (a^2+b^2))^n$

P1. Encuentre la solución de

$$y^{(5)} + 8a^3 y'' = a + e^{ax}\cos(ax)$$

P2. Resuelva

$$y''' + \omega^2 y' = \cos(\varphi x) + \sin(\varphi x), \quad \omega \neq 0,\, \varphi \neq 0$$

P3. Sea D el operador derivada. Si f, g son funciones $k-$veces diferenciables, se tiene la fórmula de Leibnitz:

$$D^k[fg] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j[f] D^{k-j}[g]$$

(a) Si g es $k-$veces diferenciable y r una constante, pruebe que $D^k[e^{rx}g] = e^{rx}(D+r)^k[g]$.

(b) Sea L un operador lineal de orden k, tal que su polinomio característico tiene la forma $p(\lambda) = (\lambda - a)^k$. Muestre que cada solución ϕ de la ecuación $L[y] = 0$ es de la forma

$$\phi(x) = e^{ax} P(x)$$

con $P(x)$ polinomio de grado $m \leq k - 1$.

P4. Considere la ecuación de coeficientes constantes reales

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0 y = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \tag{2}$$

Sea $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ polinomio característico de (2), y suponga que $\mu = \alpha + i\beta$ es una raíz de multiplicidad 3, esto es,

$$p(\mu) = p'(\mu) = p''(\mu) = 0,\ p'''(\mu) \neq 0.$$

Demuestre que

$$y_p(x) = Re\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

es una solución particular de (2).

Indicación: pruebe mediante inducción que

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \ \frac{d^k}{dx^k}(x^3 e^{\mu x}) = e^{\mu x}(\mu^k x^3 + 3k\mu^{k-1}x^2 + 3k(k-1)\mu^{k-2}x + k(k-1)(k-2)\mu^{k-3})$$