MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2013-01
Profesor: Raúl Manásevich.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 01
22/marzo

P1. Mediante variables separables, resuelva las siguientes EDOs:

(a) $y' = 6e^{2t-y},\ y(0) = 0.$

(b) $y' = ky(n+1-y),\ y(0) = n.$

(c) $ty' - y = \sqrt{t^2 + y^2}.$

(d) $y' = 4(y^2+1),\ y(\frac{\pi}{4}) = 1.$

(e) $2t^{1/2}y' = cos^2(y),\ y(4) = \frac{\pi}{4}.$

(f) $y' = \dfrac{y}{t(ln(y) - ln(t) + 1)},\ y(1) = e.$

P2. La ley de enfriamiento de Newton establece que la *tasa de pérdida* de calor desde la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio que lo rodea y su superficie, con constante de proporcionalidad $k > 0$. Sean $Q(t)$ y T_0 las temperaturas de la superficie del objeto y del medio, respectivamente (la del medio se supone constante)

(a) Encuentre una ecuación diferencial para $Q(t)$ y resuélvala con condición inicial $Q(t_0) = Q_0 > T_0$

(b) Pruebe que si además se sabe que $Q(t_1) = Q_1$ para $t_1 > t_0$, entonces la constante de proporcionalidad está dada por

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{Q_0 - T_0}{Q_1 - T_0}\right)$$

(c) Un objeto a una temperatura de 40°C se coloca en una habitación a 20°C. Si en 10 minutos se enfría a 30°C, ¿Cúal es la temperatura del objeto al cabo de 20 minutos?

P3. Un paracaidista de masa m abre su paracaídas mientras cae en un tiempo t_0, justo cuando su velocidad es v_0. Suponiendo que la abertura del paracaídas produce una fuerza hacia arriba $F_p = kv^2$ con $k > 0$, y despreciando roces, encuentre la velocidad del paracaidista para un tiempo $t > t_0$ cualquiera. Muestre que la velocidad tiende a $-\sqrt{\frac{mg}{k}}$ cuando $t \longrightarrow \infty$

P4. Encuentre todas las soluciones de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - xy + \frac{1}{4}(1+2x^2)y^3 = 0$$

y los intervalos máximos donde están definidas.
Obs.: $(x^m e^{x^2})' = (mx^{m-1} + 2x^{m+1})e^{x^2}$.

P5. Considere para $x > -1$ la ecuación de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} + y - \frac{3}{2}\frac{y^2}{(1+x)^4} = 2(1+x)^3$$

(a) Encuentre la solución particular de la forma $y_1(x) = a(1+x)^b$

(b) Encuentre la solución general en forma implícita.

P6. *Reducción de la ecuación homogénea generalizada.*

(a) Considere la EDO de primer orden de la forma

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x > 0, \tag{1}$$

donde F es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = \dfrac{y}{x}$ desarrolle un método general para resolver esta EDO. Aplíquelo a la ecuación

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

(b) Considere ahora la EDO

$$y' = F\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right), \qquad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Pruebe que si $ad - bc \neq 0$, la EDO (2) puede llevarse a la forma (1) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, con α y β constantes elegidas adecuadamente. Aplique este método a la ecuación

$$y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}.$$

(c) ¿Cómo resolvería si $ad - bc = 0$?