MA2002-1-Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Carlos Román, Rodolfo Núñez

Auxiliar 10

3 de junio de 2013

P1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa.

(a) Dado $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, pruebe que si

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0, \tag{1}$$

entonces

$$e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta_0} x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = 0$$

(b) Pruebe que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface (1) para todo $\theta_0 \in (0, \pi/4]$.

(c) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, y calcule el valor de

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx.$$

P2. Resuelva las siguientes integrales usando la fórmula de Cauchy

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \sqrt{9 - z^2} dz.$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2z} dz.$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz.$