MA2002-1-Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Carlos Román, Rodolfo Núñez

Auxiliar 6

29 de abril de 2013

P1. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Para $x \in \mathbb{R}^3$, considere la función

$$\phi(r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\vec{S}$$

(a) Pruebe que

$$\phi'(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy.$$

(b) Pruebe el siguiente

Teorema 1 (Propiedad de la media)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto y $u \in C^2(\Omega)$, entonces $\Delta u = 0$, en Ω si y solo si*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\vec{S}(y), \textit{para toda bola } B(x,r) \subseteq \Omega.$$

P2. (Fórmulas de Green) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, entonces

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega u\Delta v &= \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\mathcal{A} - \iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) &= \iint_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial v}{\partial \nu})\, d\mathcal{A} \end{aligned}$$

con $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$, donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior.

P3. (Ecuación del calor) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular y $u(x,t)$ la temperatura en $x \in \Omega$ en el instante $t \geq 0$, la cual satisface

$$(EC) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \Delta u & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde la condición inicial u_0 es una función de clase C^1. Pruebe que la energía del problema

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_\Omega u(x,t)^2 dx + \int_0^t \iiint_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx ds$$

es constante para $t \geq 0$ y deduzca de esto que (EC) admite a lo más una solución.

P4. Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$ y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}), \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Muestre que

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = \text{rot}(\vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}), \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

De un ejemplo $S, \vec{F}, \vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}) \neq \text{rot}(\vec{G})(\vec{r}), \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$