

Notas para el Curso Cálculo Avanzado MA2002

Manuel del Pino

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA AND CMM, UNI-
VERSIDAD DE CHILE, CASILLA 170 CORREO 3, SANTIAGO, CHILE.
E-mail address: `delpino@dim.uchile.cl`

Índice general

Prefacio	5
Capítulo 1. Elementos de Cálculo Vectorial	7
1. Integración sobre curvas en $\mathbb{R}^N$	7
2. Campos vectoriales conservativos	12
3. El Teorema de Green	16
4. Integración sobre superficies	21
5. El Teorema de la divergencia	26
6. El Teorema de Stokes	34
7. Campos vectoriales en otros sistemas de coordenadas	37
8. Comentario: significado de divergencia y rotor	40
Capítulo 2. Funciones de variable compleja	43
1. Conceptos básicos	43
2. Funciones clásicas y sus derivadas	48
3. Integración compleja y fórmulas de Cauchy	55
Capítulo 3. Series de Fourier y Separación de variables en EDP	73
1. Separación de variables: motivación de las series de Fourier	73
2. Cálculo de algunas Series de Fourier	76
3. Otras EDP clásicas	81

Prefacio

La presente es una versión preliminar de un apunte para el curso de Cálculo Avanzado, MA2002, de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, que contiene elementos básicos de Cálculo Vectorial, Funciones de Variable Compleja, y series de Fourier con aplicación al método de separación de variables para algunas EDPs clásicas.

Capítulo 1

Elementos de Cálculo Vectorial

Comenzamos por revisar algunos conceptos básicos concernientes a integración en curvas (objetos unidimensionales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) y en superficies (objetos de dos dimensiones en $\mathbb{R}^3$).

1. Integración sobre curvas en $\mathbb{R}^N$

Una curva continua en $\mathbb{R}^N$ es un par $(\mathcal{C}, \vec{\gamma})$, donde $\mathcal{C} = \vec{\gamma}([a, b])$ y $\vec{\gamma}$ es una función continua $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, llamada *una parametrización* de $\mathcal{C}$,

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_N(t) \end{bmatrix}$$

Por simplicidad notacional, denotamos a menudo una curva (en que la parametrización está subentendida) simplemente $\mathcal{C}$. La curva se llama *simple* si no tiene auto-intersecciones, esto es si su parametrización es inyectiva. Llamamos a $\mathcal{C}$ una curva *de clase C^1* si su parametrización $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ es continuamente diferenciable y tal que

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_N(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Esta última condición hace que la curva sea suave, en el sentido de tener una recta tangente en cada uno de sus puntos: En $x_0 = \vec{\gamma}(t_0)$ la recta tangente es aquella de ecuación

$$x = x_0 + s\vec{\gamma}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}$$

$\vec{\gamma}'(t_0) \neq 0$ es un vector tangente a la curva. Físicamente una curva $\mathcal{C}$ puede representar la trayectoria recorrida por una partícula cuya posición en el instante t es el punto $x = \vec{\gamma}(t)$. El vector $\vec{\gamma}'(t)$ representa la velocidad de la partícula en ese instante. Es intuitivamente claro que si la partícula se detiene en un instante dado, la trayectoria podría perder suavidad. Por ejemplo: $\vec{\gamma}(t) = (t^3, t^2)$ Satisface $\vec{\gamma}'(0) = 0$ y la curva $\mathcal{C}$ está constituida por los puntos del plano (x, y) con ecuación

$y = |x|^{\frac{2}{3}}$. Este lugar geométrico tiene una "punta", no siendo suave en el origen.

En la práctica, consideraremos en este curso curvas $\mathcal{C}$ simples que sean *de clase C^1 por tramos*, esto es, que admitan una parametrización continua $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tales que para ciertos puntos $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ se tenga que las curvas $\mathcal{C}_i = \vec{\gamma}([t_i, t_{i+1}])$ sean de clase C^1 . Una curva se denomina *cerrada* si su parametrización satisface $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$. Le llamaremos *cerrada simple* si la restricción de la función $\vec{\gamma}$ al intervalo $(a, b]$ es inyectiva.

Debemos observar que una curva dada puede ser recorrida en dos sentidos opuestos, ya que si la parametrización $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ de $\mathcal{C}$ le recorre en un sentido, $\tilde{\vec{\gamma}}(t) := \vec{\gamma}(b + a - t)$ lo hace en el sentido opuesto. Al sentido en el cual la curva es recorrido por la parametrización le llamamos *orientación*. A la curva parametrizada por $\tilde{\vec{\gamma}}$ le llamamos a veces $\mathcal{C}^-$ o $-\mathcal{C}$.

1.1. Concatenación de curvas. Si $\vec{\gamma}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\vec{\gamma}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$, son parametrizaciones C^1 por tramos, de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, tales que $\vec{\gamma}_1(b_1) = \vec{\gamma}_2(a_2)$ entonces $\vec{\gamma} : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida como

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} \vec{\gamma}_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \vec{\gamma}_1(a_2 + t - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

La curva parametrizada por $\vec{\gamma}$ (cuyo recorrido es $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$) se denomina $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. En modo inductivo se define la concatenación de k curvas $\mathcal{C}_i$ como $\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_k$.

1.2. Integración en Curvas. Comenzamos por definir la longitud de la curva simple de clase C^1 $\mathcal{C}$, parametrizada por $\vec{\gamma}$, en el modo siguiente:

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

Explícitamente,

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\vec{\gamma}'_1(t)^2 + \dots + \vec{\gamma}'_N(t)^2}$$

El *elemento de longitud* $d\ell(t)$ está naturalmente representado por la longitud del "elemento vectorial de trayectoria" $\vec{\gamma}(t + dt) - \vec{\gamma}(t)$, la que escribimos

$$d\ell(t) = \|\vec{\gamma}(t + dt) - \vec{\gamma}(t)\| = \left\| \frac{\vec{\gamma}(t + dt) - \vec{\gamma}(t)}{dt} \right\| dt = \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define la *integral de f sobre $\mathcal{C}$* a la cantidad

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) d\ell := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Si $f(x)$ designa densidad de masa (masa por unidad de longitud) en el alambre $\mathcal{C}$, en el punto x de éste, la cantidad $\int_{\mathcal{C}} f d\ell$ representa la masa total del alambre.

Como es natural, la noción de integral sobre la curva $\mathcal{C}$ es *independiente de la parametrización utilizada*. Si $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ es otra parametrización inyectiva de la misma curva $\mathcal{C}$, debemos probar que

$$(1.1) \quad \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tau)) \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau.$$

En efecto, la ecuación

$$\tilde{\gamma}(\tau) - \vec{\gamma}(t) = 0,$$

tiene una única solución $\tau = \tau(t) \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. La función $\tau : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ es biyectiva. Aceptando que esta función es de clase C^1 (este hecho se puede probar fácilmente en base al teorema de la función implícita), se tiene, observando que

$$\tilde{\gamma}'(\tau(t)) \tau'(t) = \vec{\gamma}'(t)$$

y haciendo un cambio de variables en la integral, obtenemos

$$\int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\tau(t))) \|\tilde{\gamma}'(\tau(t))\| |\tau'(t)| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tau)) \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau$$

con lo que (1.1) está demostrado.

Si tenemos que $\mathcal{C}$ es la concatenación de k curvas $\mathcal{C}_i$ esto es, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) d\ell = \int_{\mathcal{C}_1} f(x) d\ell + \cdots + \int_{\mathcal{C}_k} f(x) d\ell.$$

1.3. Integral de línea de un campo vectorial.

Dada una parametrización $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ de una curva simple C^1 $\mathcal{C}$, El vector *tangente unitario* en el punto $x = \vec{\gamma}(t)$ de $\mathcal{C}$, está dado por

$$\hat{t}(x) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}.$$

Este objeto define un *campo vectorial sobre $\mathcal{C}$* , esto es, una función $\hat{t} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $x \mapsto \hat{t}(x)$ continua, que no depende de la parametrización particular que se escoja, excepto los puntos inicial $x_0 = \gamma(a)$ y

$x_1 = \gamma(b)$. En otras palabras, $\hat{t}$ solo depende de la *orientación* en que se recorre la curva. Hay dos orientaciones posibles para la curva: La orientación opuesta a la de una parametrización dada $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, es aquella asociada a la parametrización $\tilde{\vec{\gamma}}(t) := \vec{\gamma}(b + a - t)$. En efecto, se verifica de inmediato que el vector tangente unitario en $x \in \mathcal{C}$ para esta parametrización es precisamente $-\hat{t}(x)$.

El *elemento vectorial de longitud* de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $x = \gamma(t)$ está dado por

$$\vec{dl} = \hat{t}(x) dl = \vec{\gamma}'(t) dt.$$

Un *campo vectorial* sobre $A \subset \mathbb{R}^N$ es una función continua $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Es común pensar a $\vec{F}$ como una función que a cada punto $x \in A$ le asocia un *vector*

$$\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^N F_i(x) \vec{e}_i$$

donde los $\vec{e}_i$ son los elementos de la base canónica. Para $A \subset \mathbb{R}^3$ escribimos usualmente

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = \\ &P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}. \end{aligned}$$

Definimos la *integral de línea, o de trabajo* de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre $\mathcal{C}$ a la cantidad

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl} := \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{t} dl = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt.$$

La cantidad anterior es independiente de la parametrización utilizada que tenga asociada el mismo vector tangente unitario $\hat{t}$, esto es, con igual orientación. Si denotamos $-\mathcal{C}$ a la curva recorrida en sentido opuesto, tenemos que el vector tangente unitario asociado es $-\hat{t}$, por lo que

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl}.$$

Si $\mathcal{C}$ es una *curva cerrada simple*, la integral de línea se suele denotar $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$, y es común también llamarle la *circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de $\mathcal{C}$* . Una curva cerrada simple plana $\mathcal{C}$, esto es contenida en $\mathbb{R}^2$, puede ser recorrida en sentido horario o antihorario. El sentido antihorario se suele denominar *positivo*, y se especifica como $\mathcal{C}_+$ o $\mathcal{C} \circlearrowleft$, respectivamente el sentido horario se denomina negativo, y se enfatiza escribiendo $\mathcal{C}_+$ o $\mathcal{C} \circlearrowright$, de modo que

$$\oint_{C \cup} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \oint_{C \cup} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

EJEMPLO 1.1. Considere las curvas planas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ que unen los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$ respectivamente parametrizadas por

$$\vec{\gamma}_1(t) = (t-2, t), \quad t \in [0, 2] \quad \vec{\gamma}_2(t) = (2 \sin t, 2 \cos t), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, 0],$$

$$\vec{\gamma}_3(t) = (2t, 2(t+1)^2), \quad t \in [-1, 0].$$

Sea $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 1)$. Calcule $\int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}$, $i = 1, 2, 3$.

Solución Tenemos que $F(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{\gamma}'_1(t) = (2(t-2)t, (t-2)^2 + 1) \cdot (1, 1) = 2(t-2)t + (t-2)^2 + 1$, de modo que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^2 F(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{\gamma}'_1(t) dt = \int_0^2 [2(t-2)t + (t-2)^2 + 1] dt =$$

$$\left. \frac{2t^3}{3} - 2t^2 + \frac{(t-2)^3}{3} + t \right|_0^2 = 2.$$

En modo similar, obtenemos

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 F(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \vec{\gamma}'_2(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (8 \sin t \cos t, 4 \sin^2 t + 1) \cdot (2 \cos t, -2 \sin t) dt =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (16 \sin t \cos^2 t - 8 \sin^3 t - 2 \sin t) dt = -\frac{16}{3} \cos^3 t + 8(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}) + 2 \cos t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 2.$$

Por otra parte

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{-1}^0 F(\vec{\gamma}_3(t)) \cdot \vec{\gamma}'_3(t) dt = \int_{-1}^0 (8t(t+1)^2, 4t^2 + 1) \cdot (2, 4(t+1)) dt =$$

$$\int_{-1}^0 (16t(t+1)^2 + 16t^2(t+1) + 4(t+1)) dt = 16 \int_{-1}^0 (2t^3 + 3t^2 + t + \frac{1}{4}(t+1)) dt = 2.$$

La pregunta obvia que surge, es si el resultado común $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 2$ es una coincidencia, o si resultaría en verdad el mismo para cualquier elección $\mathcal{C}$ de camino (orientado) que una los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$.

2. Campos vectoriales conservativos

Un campo vectorial en que la integral de trabajo sólo dependa de los puntos inicial y final del camino que les une se llama *conservativo*. El siguiente ejemplo clarifica el fenómeno del campo vectorial anterior.

EJEMPLO 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Consideremos un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ con la siguiente propiedad: Existe una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(\Omega)$ tal que $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Pruebe que si x_0 y x_1 son puntos de Ω , entonces el valor de la integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ es independiente de la curva $\mathcal{C}$ contenida en Ω , con puntos inicial x_0 y final x_1 .

Solución Sea $\mathcal{C}$ una curva C^1 que une los puntos x_0 y x_1 parametrizada por $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ con $\vec{\gamma}(a) = x_0$, $\vec{\gamma}(b) = x_1$. Sea $\phi(t) = f(\vec{\gamma}(t))$, esto es $\phi(t) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \gamma'_N(t).$$

De este modo, $\phi'(t) = \nabla f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$ y como $\nabla f = \vec{F}$, y usando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a),$$

de modo que, como $\phi(b) = f(x_1)$, $\phi(a) = f(x_0)$,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = f(x_1) - f(x_0).$$

Así, la integral de línea depende sólo de los puntos inicial y final del camino, y no del camino específico que una a estos puntos. $\square$

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 1)$, el campo vectorial del ejemplo anterior. Notemos que $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ donde $f(x, y) = x^2y + y$. En efecto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$. Así, para todo camino de clase C^1 $\mathcal{C}$ con punto inicial $(-2, 0)$ y final $(0, 2)$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = f(0, 2) - f(-2, 0) = 2 - 0 = 2,$$

consistentemente con los cálculos del Ejemplo 1.1.

Definición Un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,

$$\vec{F}(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_N(x) \end{bmatrix}$$

donde Ω es un abierto, se dice *conservativo* si existe una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(\Omega)$ tal que $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$ para todo $x \in \Omega$, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N.$$

De existir, la función f se denomina *potencial* del campo $\vec{F}$.

Así, hemos demostrado que para un campo conservativo, las integrales de línea dependen solo de los puntos inicial y final x_0 y x_1 de una curva que les une:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = f(x_1) - f(x_0).$$

En particular, si la curva $\mathcal{C}$ es cerrada, esto es, $x_0 = x_1$, tenemos que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

De hecho, se tiene más la validez de la afirmación recíproca en un dominio *conexo*. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, se dice *conexo*, si todo par de puntos de Ω puede unirse por una curva C^1 por tramos, completamente contenida en Ω .

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Supongamos que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ para toda curva cerrada $\mathcal{C}$ contenida en Ω . Entonces $\vec{F}$ es conservativo en Ω .*

Demostración Fijemos un punto x_0 en Ω . Sea $x \in \Omega$, y $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \Omega$ de clase C^1 , la parametrización de una curva $\mathcal{C}^x$ con $\gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x$. Definamos $f(x) := \int_{\mathcal{C}^x} \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Esta es una buena definición, pues es independiente de la curva particular $\mathcal{C}^x$ que se escoja. En efecto si $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \Omega$ $i = 1, 2$ parametrizan dos curvas $\mathcal{C}_1^x, \mathcal{C}_2^x$ que unen x_0 y x y consideramos la curva $\gamma : [0, 2] \rightarrow \Omega$ definida por $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ para $t \in [0, 1]$ y $\gamma(t) = \gamma_2(2 - t)$ para $t \in [1, 2]$. Entonces la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por γ es cerrada, y luego $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$. Se sigue que $\int_0^2 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$, esto es

$$\int_0^1 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_1^2 \vec{F}(\gamma_2(2 - t)) \cdot \gamma_2'(2 - t) dt = 0.$$

Cambiando variables $2 - t = \tau$ en la segunda integral obtenemos

$$\int_0^1 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt - \int_0^1 \vec{F}(\gamma_2(\tau)) \cdot \gamma_2'(\tau) dt = 0$$

y entonces $\int_{C_1^x} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{C_2^x} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$. En efecto, observemos que $\mathcal{C}$ es la concatenación $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^x + (-\mathcal{C}_2^x)$.

Fijemos x y una bola $B(x, \delta) \subset \Omega$. Para $|t| < \delta$, y el vector e_j de la base canónica, calculemos $f(x+te)$ usando un camino C^{x+te} constituido por una curva C^x que une x_0 y x , la cual se continúa por el segmento de recta $x + \tau e_j$, $\tau \in [0, t]$. De este modo, tenemos que

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_0^t \vec{F}(x + \tau e_j) \cdot e_j d\tau$$

Del teorema fundamental del cálculo obtenemos entonces que

$$\frac{d}{dt} f(x + te_j) = F_j(x + te_j),$$

y por lo tanto, evaluando en $t = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$, esto es $\nabla f(x) = \vec{F}(x)$. $\square$

Preguntas que surgen naturalmente son las siguientes: ¿Cómo determinar si un campo vectorial dado $\vec{F}$ es conservativo? Y en tal caso: ¿Cómo encontrar el potencial asociado? Una condición *necesaria* está dada por el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$. Si $\vec{F}$ es conservativo, entonces su matriz derivada $N \times N$, $\vec{F}'(x)$ es simétrica.*

Demostración. Tenemos que

$$[\vec{F}'(x)]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

y, del mismo modo, $[\vec{F}'(x)]_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Por otra parte, f es de clase $C^2(\Omega)$, por ende el teorema de Schwartz nos dice que las segundas derivadas parciales son intercambiables. Esto asegura que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ en todo $x \in \Omega$, de modo que $[\vec{F}'(x)]_{ij} = [\vec{F}'(x)]_{ji}$. $\square$

Es natural preguntarse si la simetría de la derivada es también condición *suficiente* para que el campo vectorial $\vec{F}$ sea conservativo. La respuesta es negativa como prueba el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.2. *Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por*

$$\vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{bmatrix}, \quad p(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Muestre que la matriz $\vec{F}'(x, y)$ es simétrica en todo punto, pero que $\vec{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Solución. Tenemos que

$$\vec{F}'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

de modo que esta matriz es simétrica si y sólo si $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Tenemos en efecto que

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Por otra parte, consideremos la curva cerrada simple $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Así para cierta curva cerrada simple $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \neq 0$. Por lo tanto $\vec{F}$ no es conservativo en esta región. $\square$

La característica de ser conservativo está fuertemente vinculada al dominio. En el ejemplo anterior, si bien el campo $\vec{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, sí resulta serlo en subdominios de esta región. Por ejemplo, se verifica de inmediato que la función $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ definida en $\Omega = \{(x, y) / x > 0\}$ es un potencial para f . En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

para todo $(x, y) \in \Omega$. En otras palabras, $\vec{F} = \nabla f$ en Ω .

La condición de matriz Jacobiana simétrica es de hecho suficiente en cierta clase de dominios que incluye por ejemplo a $\{(x, y) / x > 0\}$ pero (por cierto) no a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se dice *estrellado* si existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que para todo $x \in \Omega$ el segmento

$$[x_0, x] := \{x_0 + t(x - x_0) / t \in [0, 1]\} \subset \Omega.$$

TEOREMA 2.1 (Lema de Poincaré). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto estrellado. Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$ tal que la matriz $\vec{F}'(x)$ es simétrica en todo $x \in \Omega$. Entonces $\vec{F}$ es conservativo en Ω .*

Demostración. Supongamos que Ω es estrellado respecto a x_0 , y consideremos la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt = \sum_{j=1}^N (x_j - x_{0j}) \int_0^1 F_j(x_0 + t(x - x_0)) dt.$$

Afirmamos que $F(x) = \nabla f(x)$. En efecto,

$$(2.2) \quad \partial_i f(x) = \int_0^1 F_i(x_0 + t(x - x_0)) dt + \sum_{j=1}^N (x_j - x_{0j}) \int_0^1 \partial_i F_j(x_0 + t(x - x_0)) t dt.$$

Por otra parte, $\partial_i F_j = \partial_j F_i$, por lo que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N (x_j - x_{0j}) \int_0^1 \partial_i F_j(x_0 + t(x - x_0)) t dt = \\ & \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^N \partial_j F_i(x_0 + t(x - x_0)) (x_j - x_{0j}) \right] t dt = \\ & \int_0^1 \frac{d}{dt} [F_i(x_0 + t(x - x_0))] t dt = \\ & F_i(x_0 + t(x - x_0)) t \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 F_i(x_0 + t(x - x_0)) dt. \end{aligned}$$

A partir de esta relación y (2.2), obtenemos entonces que $\partial_i f(x) = F_i(x)$, y por lo tanto que $\nabla f = \vec{F}$, como deseábamos. $\square$

3. El Teorema de Green

Centraremos a continuación nuestra atención en el caso plano, $N = 2$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Consideremos un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de clase $C^1(\Omega)$,

$$\vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}.$$

La *asimetría* de la matriz Jacobiana de $\vec{F}$ está reflejada por la cantidad $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, y es natural que esté entonces de algún modo vinculada con el valor de la integral de línea $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ sobre una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ contenida en Ω . El modo preciso en que esto sucede es el Teorema de Green, el que enunciamos a continuación.

TEOREMA 3.1 (Teorema de Green). *Sea $\mathcal{D} \subset \Omega$ un abierto cuya frontera $\partial\Omega$ puede parametrizarse como una curva C^1 por tramos, cerrada simple $\mathcal{C}$. Entonces*

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Demostración La realizaremos en un dominio $\mathcal{D}$ de una clase amplia: aquellos que se pueden escribir como uniones finitas de regiones básicas de tipos 1 y 2. Decimos que $\mathcal{D}$ es una región *de tipo 1*, si tiene la forma

$$(3.3) \quad \mathcal{D} = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

donde h y g son funciones de clase $C^1([a, b])$. Análogamente, decimos que $\mathcal{D}$ es de tipo 2 si tiene la forma

$$(3.4) \quad \mathcal{D} = \{(x, y) / a \leq y \leq b, \quad g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Supongamos que $\mathcal{D}$ tiene la forma (3.3). Entonces,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] dx + \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} Q(x, y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy + Q(x, h(x))h'(x) - Q(x, g(x))g'(x)$$

y por ende

$$\begin{aligned} &\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy = \\ &= \int_{g(b)}^{h(b)} Q(b, y) dy - \int_{g(a)}^{h(a)} Q(a, y) dy + \int_a^b [Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, h(x))h'(x)] dx. \end{aligned}$$

Así, tenemos,

$$\begin{aligned} &\int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] dx + \\ (3.5) \quad &\int_{g(b)}^{h(b)} Q(b, y) dy - \int_{g(a)}^{h(a)} Q(a, y) dy + \int_a^b [Q(x, g(x))g'(x) - Q(x, h(x))h'(x)] dx. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\partial\mathcal{D} = \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4.$$

donde, para tener el sentido de recorrido antihorario, las curvas $\mathcal{C}_i$ se parametrizan del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, g(t)), \quad t \in [a, b], \quad \gamma_2(t) = (b, t), \quad t \in [g(b), h(b)], \\ \gamma_3(t) &= (b + a - t, h(b + a - t)), \quad t \in [a, b], \\ \gamma_4(t) &= (a, h(a) + g(a) - t), \quad t \in [g(a), h(a)].\end{aligned}$$

Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^4 \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^4 \int \vec{F}(\gamma_i(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'_1(t) dt &= \int_a^b [P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x)] dx, \\ \int_{g(b)}^{h(b)} \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt &= \int_{g(b)}^{h(b)} Q(b, y) dy, \\ \int_a^b \vec{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma'_3(t) dt &= - \int_a^b [P(x, h(x)) + Q(x, h(x))h'(x)] dx, \\ \int_{g(a)}^{h(a)} \vec{F}(\gamma_4(t)) \cdot \gamma'_4(t) dt &= - \int_{g(a)}^{h(a)} Q(a, y) dy.\end{aligned}$$

Combinando estas relaciones con (3.5), obtenemos, como se deseaba,

$$\int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

El teorema de Green se verifica entonces en regiones de tipo 1, esto es de la forma (3.3). *Exacamente* los mismos cálculos, conducen a que el teorema vale también en una región *de tipo 2*, de la forma

$$(3.6) \quad \mathcal{D} = \{(x, y) / c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)\}$$

Consideremos ahora un abierto acotado $\mathcal{D}$ que es dividido por una curva suave $\mathcal{C}_0$ en dos abiertos disjuntos $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ cuyas fronteras son curvas C^1 por tramos, simples que, recorridas en sentido antihorario, les denotamos respectivamente $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Sea $\mathcal{C}$ la frontera de $\mathcal{D}$ recorrida en sentido antihorario. Entonces se verifica lo siguiente:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

En efecto:

$$\int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_0} + \int_{-\mathcal{C}_0} + \int_{\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

en que $-\mathcal{C}_0$ designa a la curva $\mathcal{C}_0$ recorrida en la dirección opuesta. Por lo tanto

$$(3.7) \quad \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Usando esta fórmula, es inmediato probar lo siguiente: Si $\bar{\mathcal{D}} = \bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \cup \dots \cup \bar{\mathcal{D}}_k$, donde los $\mathcal{D}_i$ son abiertos disjuntos de tipo 1 o 2. Entonces vale el teorema de Green en $\mathcal{D}$. En efecto, si $\mathcal{C}_i$ denota la frontera de $\mathcal{D}_i$ recorrida en sentido antihorario, y $\mathcal{C}$ la frontera de $\mathcal{D}$ recorrida en esta forma, entonces de (3.7) se sigue inductivamente que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Como además,

$$\int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int \int_{\mathcal{D}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

el resultado se sigue de inmediato. $\square$

Gracias al Teorema de Green, tenemos el siguiente corolario, que entrega una condición suficiente sobre un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de manera que un campo vectorial $C^1(\Omega)$ con matriz Jacobiano simétrica sea conservativo. Ω se dice *simplemente conexo* si si toda curva C^1 , cerrada simple contenida en Ω , encierra una región completamente contenida en Ω ,

COROLARIO 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo, y $\vec{F} = (P, Q)$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$ tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ en Ω . Entonces $\vec{F}$ es conservativo.*

Demostración En efecto, gracias al teorema de Green, la integral de línea sobre toda curva cerrada del campo es cero, y el resultado se sigue.

EJEMPLO 3.1. Sea $\vec{\gamma} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de la curva $\mathcal{C}$ definida por

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} (t-1, t^2) & \text{si } t \in [0, 1], \\ (t^2-1, 1+(t-1)^3) & \text{si } t \in [1, 2] \\ (t, 6-2t) & \text{si } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Calcule $\int_{\mathcal{C}} (y, -x) \cdot d\vec{l}$.

Solución $\vec{F} = (P, Q) = (-y, x)$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = -2$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} (y, -x) \cdot d\vec{l} = -2 \int \int_{\Omega} dx dy.$$

donde $\mathcal{C}_1$

EJEMPLO 3.2. Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos curvas cerradas simples C^1 por tramos, que no se intersectan (digamos $\mathcal{C}_1$ está dentro de la región abierta encerrada por la curva $\mathcal{C}_2$, entonces vale la siguiente forma del teorema de Green: Si $P\hat{i} + Q\hat{j}$ es un campo vectorial de clase C^1 en alguna región que contiene a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_2$ (supuestas con orientación positiva), entonces

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

en que $\mathcal{D}$ es la región anular entre las dos curvas.

Solución Basta cortar $\mathcal{D}$ por una tercera curva simple $\mathcal{C}_3$ que une las dos curvas de la frontera, y llamamos $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ a las componentes resultantes, de modo que $\partial\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_3 \cup (\mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)) \setminus \mathcal{D}_2$. Si $\mathcal{C}_3$ es tal que la curva resultante es de orientación positiva, entonces ∂_2 está limitado por la curva (recorrida en modo positivo) $(-\mathcal{C}_3) \cup (\mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)) \setminus \mathcal{D}_1$. Obtenemos

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \int_{\mathcal{D}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ \int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{(\mathcal{C}_1 \cup -\mathcal{C}_2) \setminus \mathcal{D}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{(\mathcal{C}_1 \cup -\mathcal{C}_2) \setminus \mathcal{D}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \\ \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}. &\quad \square \end{aligned}$$

4. Integración sobre superficies

4.1. Definición de superficie e integral. Sea $\mathcal{D}$ un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^2$. Una *superficie de clase $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$* es un conjunto de la forma

$$S = \vec{\varphi}(\mathcal{D})$$

dotado de una parametrización $\vec{\varphi}$, donde $\vec{\varphi}: (u, v) \in \mathcal{D} \rightarrow \vec{\varphi}(u, v) \in \mathbb{R}^3$, es una función inyectiva de clase $\mathbb{C}^1(\mathcal{D})$, de manera tal que S tenga un *plano tangente* definido en cada uno de sus puntos (y un vector normal). Para precisar esta condición, consideremos un punto $p_0 = \vec{\varphi}(u_0, v_0)$. la curva $u \mapsto \varphi(u, v_0)$, definida en una vecindad de u_0 está contenida en S . Por lo tanto el vector $\vec{t}_u := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ es un vector tangente a S . Para que haya genuinamente un plano de direcciones tangentes, es necesario y suficiente que el vector $\vec{t}_v := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ defina una dirección linealmente independiente de $\vec{t}_u$, esto es, $\vec{t}_u$ y $\vec{t}_v$ **no son paralelos**. Así, el plano tangente a S en el punto p_0 es aquel de los vectores de la forma $p = p_0 + \alpha \vec{t}_u + \beta \vec{t}_v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Notemos que un vector normal al plano tangente (esto es, a la superficie), está dado por $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$, así, un vector normal unitario es

$$\hat{n} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{\|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|}.$$

Tal como definimos longitud en una curva, lo hacemos a continuación con el *área de la superficie S* :

$$\mathcal{A}(S) := \int \int_{\mathcal{D}} \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\| du dv.$$

El *elemento de área $d\mathcal{A}(u, v)$* está naturalmente representado por el área del “elemento de superficie”, dado por el paralelogramo de lados $\vec{\varphi}(u + du, v) - \vec{\varphi}(u, v)$ y $\vec{\varphi}(u, v + dv) - \vec{\varphi}(u, v)$. Esta área corresponde a la norma del producto cruz entre estos dos vectores. Así,

$$d\mathcal{A}(u, v) = \left\| \frac{\vec{\varphi}(u + du, v) - \vec{\varphi}(u, v)}{du} \times \frac{\vec{\varphi}(u, v + dv) - \vec{\varphi}(u, v)}{dv} du dv \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Naturalmente, el elemento vectorial de superficie está dado por

$$\vec{d}\mathcal{A}(u, v) = \hat{n} d\mathcal{A}(u, v) = \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) du dv.$$

Como en una curva, tenemos dos posibles elecciones de un vector normal unitario. Una superficie en la que pueden distinguirse *dos lados*, se

denomina *orientable*, y en tal caso la elección de vector normal unitario (apuntando en una dirección o la opuesta), define la orientación.

En modo natural, para una función continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, se define la integral de f sobre S como

$$\int \int_S f(x) d\mathcal{A} := \int \int_{\mathcal{D}} f(\vec{\varphi}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| du dv.$$

EJEMPLO 4.1. *Calcule el centro de gravedad de la mitad de una esfera de radio R .*

Solución Sea $S = \{(x, y, z) / z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. El centro de masa del S es por definición el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\mathcal{A}(S)} \left(\int \int_S x d\mathcal{A}, \int \int_S y d\mathcal{A}, \int \int_S z d\mathcal{A} \right).$$

Usemos coordenadas esféricas para parametrizar S . Definamos

$$\vec{\varphi}(\theta, \phi) := (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi), \quad (\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} &= (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \phi} &= (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta \sin \phi & R \cos \theta \sin \phi & 0 \\ R \cos \theta \cos \phi & R \sin \theta \cos \phi & -R \sin \phi \end{vmatrix} = \\ &= -R^2 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \phi \hat{k}) \end{aligned}$$

y por ende

$$\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \phi} \right\| = R^2 \sin \phi.$$

De aquí, el área del semi-casquete esférico deviene

$$\mathcal{A}(S) = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi = 2\pi R^2.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int \int_S x d\mathcal{A} &= R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta \sin \phi) \sin \phi d\phi = 0 = \int \int_S y d\mathcal{A}, \\ \int \int_S z d\mathcal{A} &= R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi = \pi R^3 \end{aligned}$$

y por lo tanto el centro de masa es el punto $(0, 0, \frac{R}{2})$. $\square$

EJEMPLO 4.2. Sea $\mathcal{D}$ un abierto en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea S el gráfico de g . Calcule $\int \int_S f d\mathcal{A}$.

Solución Tenemos que una parametrización de S está dada por $\vec{\varphi}(x, y) = (x, y, g(x, y))$. Tenemos que

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}.$$

Por lo tanto

$$d\mathcal{A} = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

y

$$\int \int_S f d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

A manera de ilustración, calculemos el área y centro de masa del manto del cono de revolución S de altura h y radio basal R . S puede describirse como el gráfico de la función

$$g(x, y) = h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right), \quad (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{h}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{h}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\int \int_S d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \pi R \sqrt{h^2 + R^2}.$$

Por otra parte,

$$\int \int_S z d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy.$$

Usando coordenadas polares, obtenemos

$$\int \int_S z d\mathcal{A} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R h\left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr = \pi h \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \frac{R^2}{3}$$

La coordenada z del centro de masa del manto es entonces

$$\bar{z} = \frac{\int \int_S z d\mathcal{A}}{\int \int_S d\mathcal{A}} = \frac{h}{3},$$

independientemente del radio de la base. □

EJEMPLO 4.3. Considere la superficie de revolución S que se obtiene de rotar en torno al eje z el gráfico de una función positiva $x = g(z)$, $z \in [a, b]$, de clase C^1 . Encuentre una fórmula para $\mathcal{A}(S) = \int \int_S d\mathcal{A}$.

Solución S se parametriza, usando coordenadas cilíndricas del modo siguiente:

$$\vec{\varphi}(\theta, z) = (g(z) \cos \theta, g(z) \sin \theta, z), \quad z \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Tenemos ahora

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -g(z) \sin \theta & g(z) \cos \theta & 0 \\ g'(z) \cos \theta & g'(z) \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = g(z) \cos \theta \hat{i} + g(z) \sin \theta \hat{j} - g(z)g'(z) \hat{k}.$$

Por lo tanto

$$d\mathcal{A} = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} \right\| = g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz d\theta$$

y

$$\int \int_S d\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz d\theta = 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz.$$

Por ejemplo, el cono del problema anterior lo podemos describir de este modo, con $g(z) = R - \frac{R}{h}z$, $z \in [0, h]$, y entonces

$$\mathcal{A}(S) = 2\pi R \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \pi R \sqrt{h^2 + R^2}$$

y recuperamos la fórmula obtenida en el ejemplo anterior. $\square$

4.2. Integral de flujo de un campo vectorial. En lo que sigue, consideraremos sólo superficies S parametrizadas, que sean **orientables**, y donde se ha hecho una elección de vector normal $\hat{n}$. A la superficie con la orientación opuesta le llamaremos S^- .

La **integral de flujo** de un campo vectorial $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre una superficie F es la integral

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{A}}.$$

En modo explícito, si $\vec{\varphi} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S y el vector normal (que define la orientación) tiene la dirección de $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$, entonces

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) du dv.$$

Si $\vec{F}$ denota el campo de velocidades de un fluido, entonces $\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$ representa el volumen del fluido que ha cruzado la celda S en una unidad de tiempo.

EJEMPLO 4.4. Sea Ω la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $z = x + 2$. Sea $S = \partial\Omega$. Calcule $\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$ con $\vec{F} = 2x\hat{i} - 3y\hat{j} + z\hat{k}$, y $\hat{n}$ la normal exterior.

Solución

S se puede descomponer en tres pedazos suaves: la tapa superior: $S_3 = \{z = x + 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S_2 = \{0 \leq z \leq x + 2, x^2 + y^2 = 1\}$, $S_1 = \{z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Entonces

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \sum_{i=1}^3 \int \int_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}.$$

Tenemos: Sobre S_1 , $\hat{n} = -\hat{k}$, y claramente tenemos

$$\int \int_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = - \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (2x, -3y, 0) \cdot \hat{k} dx dy = 0.$$

Mientras que S_3 se parametriza por $\varphi(x, y) = (x, y, x + 2)$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Por lo tanto

$$\varphi_x \times \varphi_y = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = \hat{k} - \hat{i}$$

que corresponde a la orientación según la normal exterior, y entonces

$$\begin{aligned} \int \int_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (2x\hat{i} - 3y\hat{j} + (x+2)\hat{k}) \cdot (\hat{k} - \hat{i}) dx dy = \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (2 - x) dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

Por otra parte, en S_2 tomemos la parametrización

$$\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad z \in (0, 2 + \cos \theta).$$

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$$

que corresponde a la normal exterior. Entonces,

$$\begin{aligned} \int \int_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos \theta + 2} (2 \cos \theta \hat{i} - 3 \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) (\cos \theta + 2) d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = 0 + 2\pi - 2\pi = 0. \quad \square$$

5. El Teorema de la divergencia

Veremos dos generalizaciones del Teorema de Green a tres dimensiones. El primero de éstos es el Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia. Para motivarlo, reescribiremos el Teorema de Green en una forma distinta. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ se parametriza por una curva $\mathcal{C}$, orientada en la dirección antihoraria. Sea $\hat{t} = (t_1, t_2)$ el vector tangente. Entonces el vector $\hat{n} = (-t_2, t_1) = (n_1, n_2)$ corresponde al vector normal unitario a la curva, que apunta en la **dirección exterior** a Ω . Para un campo vectorial genérico $\vec{G} = (R, S)$ de clase $C^1(\Omega)$ tenemos que

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \int_{\mathcal{C}} (Rt_1 + St_2) dl$$

Por lo tanto, escribiendo $\vec{F} = (P, Q)$ y $G = (-Q, P)$, obtenemos que

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = \int_{\mathcal{C}} (Pn_1 + Qn_2) dl$$

esto es

$$(5.8) \quad \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{n} dl$$

En general, para un campo vectorial diferenciable $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ escribimos

$$\nabla \cdot \vec{F}(x) := \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \text{tr}(\vec{F}'(x))$$

y llamamos a esta cantidad la *divergencia* del campo $\vec{F}$. Se denota también a veces $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div}(\vec{F})$. A la fórmula (5.8) le llamamos **Teorema de la divergencia en el plano**. Como veremos, ésta se extiende naturalmente a tres dimensiones, donde $\mathcal{C}$ se reemplaza por una superficie que representa a la frontera de Ω .

TEOREMA 5.1 (Teorema de la divergencia (Gauss)). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, cuya frontera $\partial\Omega$ se parametriza como una superficie S de*

clase C^1 . Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable. Entonces

$$(5.9) \quad \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$$

donde $\hat{n}$ denota la normal unitaria exterior a Ω .

Demostración Como en el Teorema de Green, probaremos el resultado en regiones básicas, de lo cual se deduce que Consideremos primero una región *prisma tipo 1*, de la forma

$$\Omega = \{(x, y, z) / (x, y) \in \mathcal{D}, \quad h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

donde $\mathcal{D}$ es un abierto acotado de frontera una curva simple, C^1 por tramos, y las funciones h y g son de clase $C^1(\mathcal{D})$.

Tenemos que si $\vec{F} = (P, Q, R)$ entonces

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} &= \int \int_{\mathcal{D}} \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R) = \\ &= \int \int_{\mathcal{D}} (R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, h(x, y))) dx dy + \int \int_{\mathcal{D}} dx dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} (\partial_x P + \partial_y Q) dz. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\partial_x \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} P(x, y, z) dz = \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} \partial_x P dz + P(x, y, g)g_x - P(x, y, h)h_x$$

y

$$\partial_y \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} Q(x, y, z) dz = \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} \partial_y Q dz + Q(x, y, h)g_y - Q(x, y, g)h_y.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}} \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} \partial_x P + \partial_y Q &= \int \int_{\mathcal{D}} [\partial_x \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} P dz + \partial_y \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} Q dz] + \\ &+ \int \int_{\mathcal{D}} P(x, y, g)g_x - P(x, y, h)h_x + Q(x, y, g)g_y - Q(x, y, h)h_y. \end{aligned}$$

Ahora, gracias al la versión plana del teorema de la divergencia, obtenemos,

$$\int \int_{\mathcal{D}} [\partial_x \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} P dz + \partial_y \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} Q dz] = \int_{\partial \mathcal{D}} \nu_x \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} P + \nu_y \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} Q$$

donde por $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ denotamos el vector normal unitario exterior a $\partial \mathcal{D}$ y obtenemos

$$\int \int_{\mathcal{D}} \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R) = I + II$$

donde

$$I = \int_{\partial D} \nu_x \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} P + \nu_y \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} Q ,$$

$$II = \int \int_{\mathcal{D}} P(x, y, h) h_x - P(x, y, g) g_x + \int \int_{\mathcal{D}} Q(x, y, h) h_y - Q(x, y, g) g_y + \\ \int \int_{\mathcal{D}} (R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, h(x, y))) dx dy =$$

Reescribamos

$$II = \int \int_{\mathcal{D}} (P, Q, R)(x, y, g) \cdot (-g_x, -g_y, 1) + \int \int_{\mathcal{D}} (P, Q, R)(x, y, h) \cdot (h_x, h_y, -1)$$

y vemos que

$$I = \int \int_{S_1} (P, Q, R) \cdot \hat{n} d\mathcal{A}, \quad II = \int \int_{S_2} (P, Q, R) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} + \int \int_{S_3} (P, Q, R) \cdot \hat{n} d\mathcal{A},$$

donde

$$S_1 = \{(x, y, z) / (x, y) \in \partial \mathcal{D}, h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) / (x, y) \in \mathcal{D}, z = g(x, y)\}, \quad S_3 = \{(x, y, z) / (x, y) \in \mathcal{D}, z = h(x, y)\}$$

de modo que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S = \partial \Omega$ y $\hat{n}$ denota normal unitaria exterior.

Hemos demostrado en consecuencia que

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} = I + II = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}.$$

En modo entéramente simétrico, la fórmula (5.9) resulta ser válida en regiones de tipo *prisma tipo 2* o *3*, respectivamente de la forma

$$\Omega = \{(x, y, z) / (x, z) \in \mathcal{D}, h(x, z) < y < g(x, z)\},$$

o

$$\Omega = \{(x, y, z) / (y, z) \in \mathcal{D}, h(y, z) < x < g(y, z)\}.$$

Si Ω puede descomponerse como $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^k \bar{\Omega}_i$ donde los Ω_i son abiertos disjuntos de tipo 1, 2 o 3, y $S_i = \partial \Omega_i$, $S = \partial \Omega$ se parametrizan de acuerdo a su normal exterior $\hat{n}_i$, resulta que

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \sum_{i=1}^k \int \int_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n}_i d\mathcal{A}.$$

La razón es que las contribuciones a la integrales de las regiones $S_i \cap S_j$ aparecen una vez como $\int \int_{S_i \cap S_j} \vec{F} \cdot \hat{n}_i$ y otra como $\int \int_{S_i \cap S_j} \vec{F} \cdot \hat{n}_j$. En esta región se tiene que $\hat{n}_i = -\hat{n}_j$, y por ende estas contribuciones se

cancelan. De aquí se sigue la identidad, de la cual se deduce la validez de (5.9) en toda región que es unión finita de regiones de tipo 1, 2 o 3. $\square$

EJEMPLO 5.1. Calcule $\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$, respectivamente con $\vec{F}_1 = 2x\hat{i} - 3y\hat{j} + z\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, donde S es aquella del Ejemplo 4.4.

Solución En lugar del cálculo directo del ejemplo, usemos el teorema de la divergencia. Sea Ω la región encerrada por S . Entonces

$$\int \int_S \vec{F}_1 \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (2x\hat{i} - 3y\hat{j} + z\hat{k}) dx dy dz = 0$$

pues $\nabla \cdot (2x\hat{i} - 3y\hat{j} + z\hat{k}) = 2 - 3 + 1 = 0$. Recuperamos entonces el resultado del ejemplo, con un cálculo mucho más sencillo.

En modo similar, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F}_2 \cdot \hat{n} d\mathcal{A} &= \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (2x\hat{i} - 3y\hat{j} + z\hat{k}) dx dy dz = \\ &= 3 \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = 3 \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{x+2} dz = \\ &= 3 \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x+2) dx dy = 6\pi. \quad \square \end{aligned}$$

5.1. Operadores vectoriales. Aquí elaboramos un poco sobre notación para operadores diferenciales. Es a veces conveniente escribir (para funciones definidas en $\mathbb{R}^N$)

$$\nabla = \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde e_i es el i -ésimo elemento de la base canónica,

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima entrada}}, 0, \dots, 0).$$

Para $N = 2$ o $N = 3$ es usual denotar $(N = 3) \hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Utilizando esta convención, operamos el operador ∇ en el mismo modo que lo haríamos con un vector. De este modo, es natural escribir, para una función escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

y para un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N e_i F_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Un operador de segundo orden de gran importancia es el *Laplaciano*

$$\Delta f = \nabla^2 f := \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{tr}(f''(x)).$$

Para el caso especial $N = 3$, tenemos un operador más, llamado el *rotor* de un campo vectorial. Si $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$, entonces denotamos

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Observemos que la cantidad $\nabla \times \vec{F}$ mide cuán asimétrica es la matriz 3×3 $\vec{F}'(x, y, z)$. En efecto, tenemos que

$$\vec{F}'(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y las coordenadas de $\nabla \times \vec{F}$ corresponden precisamente a las diferencias de las entradas de la matriz simétricas a la diagonal.

EJEMPLO 5.2. *Muestre que un campo vectorial $\vec{F}$ definido sobre un abierto estrellado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de clase $C^1(\Omega)$, tal que $\nabla \times \vec{F} = 0$ en Ω , es conservativo.*

Solución Por el Lema de Poincaré, es suficiente verificar que la matriz Jacobiana $\vec{F}'(x) = 0$ es simétrica para todo $x \in \Omega$. Pero esto es precisamente equivalente a decir $\nabla \times \vec{F}(x) = 0$. $\square$

EJEMPLO 5.3. *Sea $S = \partial\Omega$ una superficie cerrada, de clase C^1 . Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^2 en $\bar{\Omega}$. Muestre que*

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = 0.$$

Solución Por el teorema de la divergencia, tenemos que

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}).$$

Por otra parte, si $\vec{F} = (P, Q, R)$, tenemos que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Usando que las derivadas parciales pueden intercambiarse, obtenemos de inmediato que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$, y el resultado se sigue. $\square$

EJEMPLO 5.4. Considere el hemisferio superior del casquete elipsoidal S definido por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Calcule $\int \int_S \nabla \Phi \cdot d\vec{\mathcal{A}}$ donde $\Phi(x, y, z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$

Solución Sea $S_0 = \{(x, y, 0) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, superficie que consideramos dotada de su normal exterior $-\hat{k}$. Ahora,

$$\nabla \Phi = (2(x+1), 4(y-1), 2z), \quad \nabla^2 \Phi = 2 + 4 + 2 = 8.$$

Tenemos que $\Omega = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0\}$, entonces

$$\int \int_{S+S_0} \nabla \Phi \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int \int_{\Omega} \nabla^2 \Phi = 8 \int \int \int_{\Omega} dx.$$

Por otro lado $\nabla \Phi \cdot \hat{k} = 0$ en S_0 y entonces $\int \int_{S_0} \nabla \Phi \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = 0$. Por otro lado con el cambio de variables $(x, y, z) = T(u, v, w) = (au, bv, cw)$, tenemos $\det T'(u, v, w) = abc$ y $\Omega = T(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D}$ es la semi-esfera superior de radio 1. Por lo tanto

$$\int \int \int_{\Omega} dx dy dz = abc \int \int \int_{\mathcal{D}} du dv dw = 4\pi abc.$$

Concluimos que

$$\int \int_S \nabla \Phi \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int_{S+S_0} \nabla \Phi \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = 4\pi abc.$$

EJEMPLO 5.5. Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}.$$

y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto con frontera suave $\partial\Omega$, y tal que $(0, 0, 0) \in \Omega$. Calcule $\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{A}}$.

Solución Calculemos la divergencia de $\vec{F}$. Vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

y por lo tanto $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Consideremos $\delta > 0$ tal que $\bar{B}(\vec{0}, \delta) \subset \Omega$ y la región $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bar{B}(\vec{0}, \delta)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= \int \int \int_{\Omega_\delta} \nabla \cdot \vec{F} = \int \int_{\partial\Omega_\delta} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \\ &= \int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} - \int \int_{\partial B(\vec{0}, \delta)} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Ahora, sobre $\partial B(\vec{0}, \delta)$ el vector normal unitario exterior es $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) = \delta^{-1}(x, y, z)$. Por lo tanto,

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z) \cdot \delta^{-1}(x, y, z) = \delta^{-2}$$

y entonces

$$\int \int_{\partial B(\vec{0}, \delta)} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \delta^{-2} 4\pi \delta^2 = 4\pi.$$

En conclusión, tenemos que

$$\int \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{\|\vec{x}\|^3} d\mathcal{A} = 4\pi.$$

independientemente del dominio Ω que contenga a 0. Podemos observar que, del mismo modo (verifique),

$$\int \int_{\partial\Omega} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^3} d\mathcal{A} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x}_0 \notin \bar{\Omega}, \\ 4\pi & \text{si } \vec{x}_0 \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

A este último resultado se le conoce como *fórmula de Gauss*. □

EJEMPLO 5.6 (Fórmulas de Green). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathbb{C}^1$. Tenemos entonces que si $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$, donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior entonces

$$(5.10) \quad \int \int \int_{\Omega} u \Delta v = \int \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\mathcal{A} - \int \int \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

$$(5.11) \quad \int \int \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\mathcal{A}.$$

Solución Para probar (5.10), consideremos el campo vectorial $\vec{F} = u \nabla v$. Entonces, vemos que

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla \cdot (\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta u.$$

Por el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} = \int \int \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla \cdot (\nabla v) = \int \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \int \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mathcal{A}.$$

y (5.10) queda demostrado. Notemos que (5.11) se sigue de (5.10) y de la fórmula simétrica,

$$\int \int \int_{\Omega} v \Delta u = \int \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\mathcal{A} - \int \int \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u. \quad \square$$

EJEMPLO 5.7 (Unicidad del Problema de Dirichlet). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado, conexo, de frontera $\partial \Omega$ de clase $\mathbb{C}^1$. Sean $g : \partial \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere la ecuación en derivadas parciales con condición de borde,

$$(5.12) \quad \Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = g \quad \text{en } \partial \Omega.$$

Demuestre que si (5.12) posee una solución $u \in C^2(\bar{\Omega})$, ésta es única.

Solución sean $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ soluciones de (5.12). Entonces $v := u_1 - u_2$ satisface

$$(5.13) \quad \Delta v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{en } \partial \Omega.$$

Usando la fórmula de Green (5.10) obtenemos

$$0 = \int \int \int_{\Omega} v \Delta v = \int \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial v}{\partial n} d\mathcal{A} - \int \int \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v$$

o sea,

$$\int \int \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = 0.$$

Por lo tanto $\nabla v(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Sea $x_0 \in \partial \Omega$ y $\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una parametrización C^1 de una curva con $\vec{\gamma}(0) = x_0$, $\vec{\gamma}(1) = x$. Entonces

$$v(x) - 0 = v(x) - v(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) dt = \int_0^1 \nabla f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = 0.$$

Por lo tanto $v = u_1 - u_2 \equiv 0$ y el resultado queda demostrado. $\square$

6. El Teorema de Stokes

A continuación consideraremos otra extensión del Teorema de Green a mayores dimensiones. Para enunciarlo, recordemos que una superficie *orientable* S es una en la cuál pueden reconocerse dos lados, lo que matemáticamente se escribe, afirmando la existencia de un campo vectorial continuo, *normal unitario en todo punto*. Uno de los *lados* de la superficie está definido por esta normal, el otro por $-\hat{n}$. Si la superficie S tiene por borde $\partial S = \mathcal{C}$, una curva de clase C^1 por tramos, cerrada simple, decimos que $\mathcal{C}$ esta positivamente orientada si para el sentido en el cual se recorre, pensando en la normal a S como dirección hacia arriba, vemos la superficie hacia la izquierda. En otras palabras, *vista desde arriba*, la frontera se parametriza en sentido antihorario.

TEOREMA 6.1 (Teorema de Stokes). *Sea S una superficie de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$, orientable, con vector normal unitario $\hat{n}$ y frontera $\mathcal{C}$, una curva cerrada simple, C^1 , orientada en modo positivo. Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido en un abierto Ω que contiene a $S \cup \mathcal{C}$, y de clase C^1 . Entonces vale la siguiente identidad.*

$$(6.14) \quad \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Demostración La haremos en el caso en que S es un gráfico de una función $g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que la parametrización está dada por $\vec{\varphi} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\varphi}(x, y) = (x, y, g(x, y))$. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que la función g es positiva. Consideremos las siguientes superficies:

$$S_0 = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}, \quad S_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial\mathcal{D}\}$$

y la superficie cerrada $\tilde{S}$ constituida por la union de S , S_1 y S_0 . Tenemos, de acuerdo al ejemplo 5.3,

$$(6.15) \quad 0 = \int \int_{\tilde{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} + \int \int_{S_0} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} + \int \int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}.$$

Notamos que en S_0 , $\hat{n} = -\hat{k}$. Escribamos $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ y recordemos que

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

por lo cual, usando el Teorema de Green en el plano,

$$\int \int_{S_0} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = - \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y, 0) dx dy = - \int_{\partial\mathcal{D}} (P, Q)(x, y, 0) \cdot \hat{t} dl = I$$

donde $\hat{t} = (t_x, t_y)$ es el vector tangente a ∂ en la orientación antihoraria. Por otra parte, tenemos que $\nu = (\nu_x, \nu_y) = (t_y, -t_x)$ es la normal exterior a $\partial\mathcal{D}$. Entonces,

$$I = - \int_{\partial\mathcal{D}} dl [Q(x, y, 0)\nu_x - P(x, y, 0)\nu_y].$$

Además, en S_1 tenemos que $\hat{n} = (\nu_x, \nu_y, 0)$, y luego

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} &= \int_{\partial D} dl \int_0^{g(x,y)} [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\nu_x + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\nu_y] dz = \\ &= \int_{\partial D} dl ([P(x, y, g(x, y)) - P(x, y, 0)]\nu_y - [Q(x, y, g(x, y)) - Q(x, y, 0)]\nu_x) + \\ &= \int_{\partial D} \left[\int_0^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) dz, - \int_0^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) dz \right] \cdot \nu dl = II + III. \end{aligned}$$

Ahora, por el teorema de la divergencia plano, tenemos que

$$III = \int \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) dz \right] dx dy,$$

o sea,

$$III = \int \int_D \left[\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, g)g_x - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, g)g_y \right] dx dy,$$

mientras que

$$I + II = \int_{\partial D} dl [P(x, y, g(x, y))\nu_y - Q(x, y, g(x, y))\nu_x].$$

$$\begin{aligned} III &= \int \int_D [\partial_y(R(x, y, g)g_x) - \partial_x(R(x, y, g)g_y)] dx dy = \\ &= \int_{\partial D} R(x, y, g)[g_x\nu_y - g_y\nu_x] d\ell. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I + II + III = - \int_{\partial D} [P(x, y, g)t_x + Q(x, y, g)t_y + R(x, y, g)(tg_x + tyg_y)] d\ell$$

Finalmente, notemos que si $t \in [0, 1] \mapsto \vec{\gamma}(t)$ es una parametrización de $\partial\mathcal{D}$, entonces la curva $\mathcal{C}$, la frontera de S está parametrizada por $t \mapsto (\gamma(t), g(\gamma(t)))$. Así,

$$\vec{d\ell} = (\gamma'(t), \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))dt = (t_x, t_y, g_x t_x + g_y t_y)d\ell.$$

Por lo tanto,

$$\int \int_{S_0} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} + \int \int_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = I + II + III = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

De aquí, y (6.15), obtenemos la validez de (6.14) para esta región. Podemos con esto, demostrar, en el modo “habitual”, el resultado en regiones constituidas por uniones finitas de gráficos de funciones C^1 . $\square$

EJEMPLO 6.1. Use el Teorema de Stokes para evaluar la integral de línea $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ donde $\vec{F} = -y^3\hat{i} + x^3\hat{j} - z^3\hat{k}$. y C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, orientada en dirección antihoraria.

Solución Consideremos la superficie $S = \{x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y + z = 1\}$. Entonces, si $\hat{n}$ es la normal hacia arriba de S , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$$

Tenemos

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (3x^2 + 3y^2) \hat{k}.$$

S se parametriza por $\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in \mathcal{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Así,

$$\varphi_x \times \varphi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

de modo que

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA = (3x^2 + 3y^2) \hat{k} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) dx dy$$

y entonces

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA = \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (3x^2 + 3y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{3}{2}\pi,$$

o sea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 3\pi.$$

Para verificar, hagamos el cálculo directamente. La curva C se puede parametrizar mediante

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

De este modo $\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$ y

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t, \cos^3 t, -(1-\sin t-\cos t)^3) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t-\cos t) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t + (1-\sin t-\cos t)^3(\sin t-\cos t) dt = \frac{1}{4}(1-\sin t-\cos t)^4 +$$

Tenemos

$$\int_0^{2\pi} (1-\sin t-\cos t)^3(\sin t-\cos t) dt = \frac{1}{4}(1-\sin t-\cos t)^4 \Big|_0^{2\pi} = 0$$

y

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1+\cos^2 2t) dt = \frac{3\pi}{4}$$

y por lo tanto, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{3}{2}\pi$. $\square$

7. Campos vectoriales en otros sistemas de coordenadas

En ciertos problemas, resulta natural que un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se exprese en términos de una base ortonormal no sea necesariamente la Euclidea, y que posiblemente varíe de punto en punto. Consideremos un sistema de coordenadas

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \vec{\varphi}(u_1, u_2, u_3) = \vec{\varphi}(\vec{u}), \text{ con } \vec{\varphi} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

una transformación inyectiva. Supongamos también que la matriz $\vec{\varphi}'(\vec{u})$ es invertible. Más aun, supongamos que los vectores $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(\vec{u})$, $i = 1, 2, 3$ son ortogonales en todo $\vec{u} \in \mathcal{D}$. Definamos

$$h_i := \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i} \right\|, \quad \hat{u}_i := \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Entonces, podemos expresar el vector gradiente de una función escalar f en el modo siguiente:

$$\nabla f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 (\nabla f(\vec{x}) \cdot \hat{u}_i) \hat{u}_i, \quad \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{u})$$

Por abuso de notación, escribimos a veces la función f en las coordenadas $\vec{u}$, como $f(\vec{u})$, queriendo decir

$$f(\vec{x}(\vec{u})), \quad \vec{x}(\vec{u}) = \vec{\varphi}(\vec{u}).$$

Por regla de la cadena, vemos entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = h_i \nabla f \cdot \hat{u}_i.$$

Entonces

$$(7.16) \quad \nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{u}_i.$$

Es común, y natural expresar a un campo vectorial en las coordenadas $\vec{u}$, esto es términos de los vectores del triedro $\hat{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. Supongamos que (expresado en las coordenadas $\vec{u}$ en vez de las cartesianas) tenemos

$$\vec{F}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^3 F_i(\vec{u}) \hat{u}_i$$

Calculemos la divergencia en estas coordenadas. Notemos primero que

$$|\det(\varphi'(\vec{u}))| = h_1 h_2 h_3.$$

Para una función $\psi(\vec{x})$ suave, que se anula fuera de un conjunto acotado, tenemos escribiendo $\int$ para designar integración sobre todo el espacio, y por el teorema de la divergencia,

$$0 = \int \nabla \cdot (\psi \vec{F}) = \int \nabla \psi \cdot \vec{F} + \int \nabla \cdot \vec{F} \psi.$$

Gracias al Teorema del cambio de variables, tenemos que

$$\int (\nabla \cdot \vec{F}) \psi dx = \int \nabla \cdot (\psi \vec{F}) \psi h_1 h_2 h_3 du$$

Así,

$$\begin{aligned} - \int \nabla \cdot (\psi \vec{F}) \psi h_1 h_2 h_3 du &= \int \nabla \psi \cdot \vec{F} dx = \\ &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} F_i h_1 h_2 h_3 du = \\ &= \int \frac{\partial \psi}{\partial u_1} F_1 h_2 h_3 du + \int \frac{\partial \psi}{\partial u_1} F_2 h_1 h_3 du + \int \frac{\partial \psi}{\partial u_1} F_3 h_1 h_2 du = \\ &= - \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_1} (F_3 h_1 h_2) \right] \psi h_1 h_2 h_3 du. \end{aligned}$$

Como ψ es arbitraria, obtenemos entonces que para $\vec{F} = F_3 \hat{u}_3 + F_3 \hat{u}_3 + F_3 \hat{u}_3$

(7.17)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_1} (F_3 h_1 h_2) \right]}.$$

Con este método podemos derivar otras fórmulas, por ejemplo para calcular el Laplaciano de una función escalar $f(\vec{x})$ expresado en coordenadas $\vec{u}$. Tenemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{u}_i \right).$$

De la formula (7.17) obtenemos entonces que

$$(7.18) \quad \Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right).$$

Se puede obtener también la siguiente fórmula para el rotor.

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

Esta fórmula corresponde al cálculo formal

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{h_1} \hat{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \hat{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \hat{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \times (F_1 \hat{u}_1 + F_2 \hat{u}_2 + F_3 \hat{u}_3).$$

Junto con el sistema Cartesiano $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, los principales sistemas de coordenadas ortonormales son las coordenadas cilíndricas y las esféricas.

7.0.1. Coordenadas cilíndricas. Recordemos que esta es la transformación

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Entonces

$$\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad h_r = 1, \quad \hat{z} = (0, 0, 1), \quad h_z = 1, \quad \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad h_\theta = r.$$

Los vectores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{z}$ son en efecto ortogonales, y para un campo vectorial $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{z}$ tenemos

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

De este modo, podemos también calcular el Laplaciano de una función escalar $f(r, \theta, z)$. Usando la fórmula (7.18) obtenemos

$$(7.19) \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

7.0.2. *Coordenadas esféricas.* Aquí el cambio de coordenadas es

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$$

De modo que

$$\hat{\rho} = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi), \quad h_\rho = 1, \quad \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad h_\theta = \rho \sin \phi,$$

$$\hat{\phi} = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi), \quad h_\phi = \rho.$$

Se verifica de inmediato que estos vectores son ortogonales. Calculemos por ejemplo el operador Laplaciano para una función escalar $f(\rho, \theta, \phi)$. Usando la fórmula (7.18) obtenemos

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

8. Comentario: significado de divergencia y rotor

Los teoremas de la divergencia y de Stokes, conducen a interpretaciones simples de los operadores divergencia y rotor en un punto dado. Supongamos que $\vec{F}(x)$ denota la velocidad de un fluido en el punto $x \in \mathbb{R}^3$. Esto significa que una partícula arrastrada por el fluido en ese punto avanza $\|\vec{F}(x)\|$ unidades de longitud por unidad de tiempo. Así, si consideramos la bola $B(x_0, r) = \{x / \|x - x_0\| < r\}$ tenemos que $\int_{\partial B(x_0, r)} \vec{F} \cdot \hat{n}$ representa el volumen neto del fluido que *sale* el casquete esférico (hacia el exterior), esto es, la diferencia entre el volumen de lo que sale y de lo que entra en una unidad de tiempo. Esta diferencia, a medida que el radio se hace más y más pequeño está medida precisamente por la divergencia del campo de velocidades en el punto x_0 (de ahí el nombre *divergencia*). En términos precisos, tenemos que si el campo $\vec{F}$ es de clase C^1 , entonces, por el teorema de la divergencia,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_{\partial B(x_0, r)} \vec{F} \cdot \hat{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_{B(x_0, r)} \operatorname{div} \vec{F} dx = \frac{4}{3} \pi \operatorname{div} \vec{F}(x_0)$$

Entonces podemos decir que el flujo neto está aproximadamente medido, para r muy pequeño, por la fórmula,

$$\int_{\partial B(x_0, r)} \vec{F} \cdot \hat{n} \approx \frac{4}{3} \pi r^3 \operatorname{div} \vec{F}(x_0)$$

El flujo neto por unidad de área está dado entonces por $\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x_0, r)} \vec{F} \cdot \hat{n} \approx \frac{r}{3} \operatorname{div} \vec{F}(x_0)$.

El rotor $\text{rot } \vec{F}(x_0)$ mide la tendencia del fluido a *rotar*. Consideremos un vector unitario cualquiera e y un disco plano $D(x_0, r)$ con vector normal e . En otras palabras $D(x_0, r) = B(x_0, r) \cap \{(x - x_0) \cdot e = 0\}$.

Entonces, usando el teorema de Stokes

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\partial D(x_0, r)_+} \vec{F} \cdot \hat{t} d\ell = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{D(x_0, r)} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = 4\pi \text{rot } \vec{F}(x_0) \cdot e.$$

Así, la *circulación* del campo de velocidades a lo largo de la circunferencia $\partial D(x_0, r)$ está dada por aproximación,

$$\int_{\partial D(x_0, r)_+} \vec{F} \cdot \hat{t} d\ell \approx 4\pi r^2 \text{rot } \vec{F}(x_0) \cdot e.$$

Si $\text{rot } \vec{F}(x_0) \neq 0$, notemos que la dirección del eje e que *maximiza* la *circulación* de $\vec{F}$ en torno a él es precisamente la del rotor, $e = \frac{\text{rot } \vec{F}(x_0)}{\|\text{rot } \vec{F}(x_0)\|}$.

Capítulo 2

Funciones de variable compleja

1. Conceptos básicos

Consideraremos en este capítulo funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde Ω es un abierto, que son diferenciables, pero de hecho con una noción de diferenciabilidad más restrictiva que la habitual. Consideramos en este capítulo a $\mathbb{R}^2$ dotado del producto complejo. Así, recordemos, $\mathbb{C}$ es el cuerpo, obtenido a partir de $\mathbb{R}^2$, con su suma habitual, y adicionalmente el producto

$$(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

El producto complejo también tiene la siguiente útil representación matricial en matrices columna

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$$

Denotando, en vez de la notación de pares ordenados o vectores columna, $i := (0, 1)$ y $1 := (1, 0)$, se escribe $(a, b) = a + bi$, y entonces resulta que $i \cdot i = i^2 = -1$, y naturalmente

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

La parte real de un número complejo $z = x + iy$ es $Re(z) := x$ y su parte imaginaria, $Im(z) := y$.

El *conjugado* de $z = x + iy$ es el número $\bar{z} = x - iy$. Definimos el *valor absoluto* de $z = x + iy$ como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

Podemos dar al producto punto en $\mathbb{R}^2$ la siguiente expresión en términos de números complejos:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = Re(z_1\bar{z}_2),$$

donde $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Por ejemplo, la desigualdad de Cauchy-Schwartz se lee $|Re(z_1\bar{z}_2)| \leq |z_1||z_2|$. $\mathbb{C}$ dotado de las operaciones de suma y producto es un cuerpo. 1 es el elemento neutro para

la multiplicación. El inverso de un número complejo $z = x + iy \neq 0$ se define como

$$z^{-1} := \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

y mas en general, el cuociente

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{1}{c^2 + d^2} (ac + bd + i(bc - ad)).$$

1.1. Límites y continuidad. Decimos que una suceción compleja $z_n = x_n + y_n$ converge a $z_0 = x_0 + iz_0$, $z_n \rightarrow z_0$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\|.$$

Al coincidir el concepto de convergencia sucesiones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{C}$, tenemos automáticamente heredadas las nociones de abierto, cerrado, y, muy importante, continuidad y límites para funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. No elaboraremos por ende mayormente en estos conceptos, asumiéndolos como comprendidos desde el curso anterior. Por ejemplo, supongamos que Ω es un abierto, y que $z_0 \in \Omega$. Decimos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

si y sólo si para toda sucesión $z_n \rightarrow z_0$ con $z_n \neq z_0$ para todo n , se tiene que $f(z_n) \rightarrow L$. f es continua en z_0 si se tiene que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

El álgebra compleja de límites se prueba directamente a partir de aquella en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = L_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = L_2$$

se cumple que

$$(1.2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + f_2(z) = L_1 + L_2, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)f_2(z) = L_1L_2.$$

En efecto, si $f_j(x + iy) = u_j(x, y) + iv_j(x, y)$, $L_j = a_j + ib_j$, entonces, por ejemplo, si anotamos $f_1f_2 = p + iq$, entonces $p = u_1u_2 - v_1v_2$, $q = u_1v_1 + u_2v_2$, de modo que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_1u_2 - v_1v_2)(x, y) = a_1b_1 - a_2b_2,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_1v_2 + u_2v_1)(x, y) = a_1b_2 + a_2b_1$$

gracias al álgebra de límites reales. Se sigue que $\lim_{z \rightarrow z_0} (p + iq) = L_1L_2$

1.2. Derivada en el sentido complejo. Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω abierto. Decimos de f es derivable en el sentido complejo en $z_0 \in \Omega$ si el siguiente límite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Escribamos $f(z) = u(z) + iv(z)$ con u y v funciones a valores reales. Tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|z - z_0|^2}$$

En particular, Escribamos $z = z_0 + t1$. Tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t1) - f(z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Por otro lado, si tomamos $z = z_0 + ti$. Tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} -i \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t} = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Entonces, la conclusión es una importante restricción a derivadas parciales de las funciones u y v en caso de que f sea derivable en el sentido complejo:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

En particular $f(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$ satisface las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

(1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Una pregunta natural es cómo se relaciona la derivada compleja $f'(z_0)$ con la diferenciabilidad (en el sentido real) de la función $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ en el punto (x_0, y_0) . De existir, la derivada real, que para evitar confusiones le denotamos $Df(x_0, y_0)$ está dada por

$$Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Hacemos la siguiente observación: si $f'(z_0)$ existe entonces la matriz $Df(x_0, y_0)$ tiene la estructura especial

$$(1.4) \quad Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{bmatrix} =$$

volviendo a la notación compleja, de (1.1) obtenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right) (x - x_0 + i(y - y_0)) = f'(z_0)(z - z_0).$$

Por lo tanto, vemos que la siguiente igualdad se cumple:

$$0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left\| f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}.$$

En otras palabras, si f es derivable compleja entonces lo es en el sentido real, y su matriz derivada tiene la estructura especial (1.4). i.e. las ecuaciones de Cauchy Riemann (1.3) se satisfacen.

Los cálculos anteriores son reversibles, y de hecho también entregan la condición recíproca. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.1. *f es derivable como función compleja en z_0 si y sólo si, la función f es diferenciable en el sentido real y su matriz derivada tiene la estructura (1.4), esto es $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. En tal caso, $f'(z_0) = a + ib$.*

Es interesante notar lo siguiente. Si $f = u + iv$ es derivable en el sentido complejo en una región Ω y u, v son además funciones de clase $C^2(\Omega)$, entonces las funciones u y v son *armónicas*, esto es

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

EJEMPLO 1.1. *Considere la función f definida sobre $\mathbb{C}$ por*

$$f(x + iy) = \sqrt{|x||y|},$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen pero que f no es holomorfa en $(0, 0)$.

Solución Es claro que las derivadas parciales existen y son todas iguales a 0 en el origen. Por lo tanto las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen. Por otro lado f no es diferenciable (en sentido real) en el origen, por ende no es holomorfa en el origen. Para verificar esto, nos basta ver que

$$f'((0, 0); (e_1, e_2)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} \sqrt{|e_1||e_2|}.$$

Este límite de hecho no existe. $\square$

1.3. Forma polar. Es a menudo útil escribir números complejos utilizando coordenadas polares, esto es $x+iy = r \cos \theta + ir \sin \theta$. De gran utilidad es la notación

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Esta notación se justifica pues

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Como

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2,$$

concluimos que

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}.$$

Notemos que $e^{2\pi i} = e^0 = 1$ y que vale la famosa *Ecuación de Euler*: $e^{i\pi} + 1 = 0$, que relaciona a los cinco números más importantes en matemáticas. Así tenemos que todo número complejo puede escribirse como $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$. Notemos también que $\bar{z} = re^{-i\theta}$. La notación polar es útil para encontrar las *raíces de la unidad*, esto es, para un entero $n \geq 1$, para encontrar las soluciones complejas de la ecuación

$$z^n = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

En efecto. Escribamos $z = re^{i\theta}$. Sustituyendo obtenemos que $r^n e^{in\theta} = 1$. de modo que necesariamente $r = 1$, y entonces necesitamos que

$$e^{in\theta} = 1$$

Esta igualdad, para valores $\theta \in [0, 2\pi)$ es posible si y solamente si, para algún k entero, $n\theta = 2k\pi$. Entonces necesitamos

$$\theta = 2\pi \frac{k}{n} \in [0, 2\pi) \iff k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Las raíces de la unidad son entonces los n números complejos

$$z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Funciones clásicas y sus derivadas

2.1. Funciones exponencial y logaritmo. La notación e^{iy} , permite una extensión natural de la función exponencial real, $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ a la **función exponencial compleja** $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$, definida como

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Es inmediato comprobar que la función exponencial satisface

$$e^0 = 1, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Verifiquemos que esta función es derivable en el sentido complejo. Para ello, usemos la Proposición 1.1. Escribimos $f(z) = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Así,

$$Df(z) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

En efecto, las derivadas parciales son continuas, por ende la función es diferenciable en el sentido real. Por otra parte esta matriz tiene la estructura $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, por lo tanto f es derivable en el sentido complejo en z y

$$f'(z) = a + ib = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Al hablar de función exponencial, es natural considerar la función logaritmo, su inversa. En verdad la función $z \rightarrow e^z$ no es inyectiva, pues $e^{z+2i\pi} = e^z$, pero es posible definir una función log de modo que $e^{\log z} = z$ (una inversa por la derecha de la exponencial) en el modo siguiente: Para $0 \neq z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ definimos

$$(2.5) \quad \ln(z) := \ln r + i\theta$$

o sea

$$\ln(x + iy) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg(x + yi)$$

donde

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } y \geq 0, x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } x \leq 0, y > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0, y \leq 0 \\ \frac{3}{2}\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } x \geq 0, y < 0 \end{cases}$$

Esta función no está definida para $z = 0$ y es obviamente discontinua en el semieje real, $\{x + 0i \mid x > 0\}$. Visto en la expresión polar (2.5),

$$\lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} \ln r + i\theta = 2\pi i \neq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln r + i\theta.$$

La función $z \mapsto \ln z$ es derivable en toda la región $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i \mid x \geq 0\}$. En efecto, sus derivadas parciales son continuas en esta región. Calculemos la matriz derivada real:

$$D \ln(x + iy) = \begin{bmatrix} \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix}$$

que tiene la estructura $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ y por lo tanto la derivada compleja existe y

$$f'(x + iy) = \frac{x}{r^2} - i \frac{y}{r^2} = \frac{1}{x + iy}.$$

Por lo tanto, como en el caso real,

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}.$$

Observación. Es importante que notemos que la función $\log z$ constituye una extensión de la función logaritmo real, pues para $x > 0$ tenemos en efecto

$\ln(x + i0) = \ln x$. Por otra parte, ésta no constituye la única inversa por la derecha posible de la función exponencial, pues, por ejemplo, $\ln z + 2k\pi i$ también invierte la exponencial por la derecha. De hecho, no es tampoco la única de estas inversas que extiende al logaritmo real. Tomemos por ejemplo la siguiente definición alternativa del argumento:

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Con esta definición se logra el mismo efecto: El cambio está en que esta función es ahora discontinua en la semirecta $\{0 + iy \mid y \leq 0\}$. En efecto, para $y < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arg(x + iy) = \frac{3}{2}\pi \neq -\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arg(x + iy).$$

Sin embargo si $L(z)$ es cualquier función derivable tal que $e^{L(z)} = z$ en algún abierto, entonces por la regla de la cadena (que demostraremos más tarde), $e^{L(z)} L'(z) = 1$, y por ende $L'(z) = \frac{1}{z}$.

2.2. Propiedades operacionales de la derivación compleja.

2.2.1. El álgebra de la derivación. Usando, o bien la definición, o el conocimiento que ya poseemos de las propiedades de la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$, es sencillo verificar la validez de las propiedades siguientes.

PROPOSICIÓN 2.1. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, funciones derivables en el sentido complejo en $z_0 \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ son derivables en z_0 y

$$(f_1 + f_2)'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0), \quad (f_1 f_2)'(z_0) = f_1'(z_0) f_2(z_0) + f_1(z_0) f_2'(z_0).$$

Además, si $f_2(z) \neq 0$ para todo z cercano a z_0 , tenemos que f_1/f_2 es derivable en z_0 y

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z_0) = \frac{f_1'(z_0) f_2(z_0) + f_1(z_0) f_2'(z_0)}{f_2(z_0)^2}.$$

Demostración La linealidad de la derivación se verifica fácilmente. Para el caso de la regla del producto, lo más sencillo es imitar la demostración para funciones reales. Tenemos

$$\frac{f_1 f_2(z) - f_1 f_2(z_0)}{z - z_0} = f_2(z) \frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} + f_1(z_0) \frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0}$$

Tomando límite cuando $z \rightarrow z_0$ usando el álgebra de límites (1.2) se sigue el resultado deseado.

Para el caso del cociente, nos basta probar la fórmula en el caso $f_1 = 1$. Si $f(z) \neq 0$ es derivable compleja en z_0 entonces

$$\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} \right) = \frac{1}{f(z) f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Gracias a (1.2) se sigue entonces que

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f} \right) (z_0) = - \frac{1}{f(z_0)^2} f'(z_0)$$

□

A manera de ejemplo, podemos aplicar el resultado anterior para derivar potencias. Observemos que

$$\frac{d}{dz}(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Afirmamos que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$(2.6) \quad \frac{d}{dz}(z^n) = n z^{n-1}.$$

En efecto, por inducción, aceptemos el resultado para un $n \geq 1$. Entonces

$$\frac{d}{dz}(z^{n+1}) = \frac{d}{dz}(z^n z) = n z^{n-1} z + z^n 1 = (n+1) z^n,$$

y el resultado se sigue. Observemos que gracias a la proposición anterior, el resultado (2.6) es también válido para potencias negativas $n \geq 0$.

2.2.2. *Regla de la cadena.* Sean Ω, Λ abiertos en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \Lambda$, $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ derivables respectivamente en z_0 y $f(z_0)$. Entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$.

Demostración La diferenciabilidad de la composición en el sentido real se sigue de la regla de la cadena, así como el hecho que

$$D(g \circ f)(z_0) = Dg(f(z_0)) Df(z_0).$$

Las matrices derivada en el lado derecho tienen la forma respectiva

$$Dg(f(z_0)) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad g'(f(z_0)) = a_1 + ib_1,$$

$$Df(z_0) = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}, \quad f'(z_0) = a_2 + ib_2.$$

Así, encontramos

$$D(g \circ f)(z_0) = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen y

$$(g \circ f)'(z_0) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) = g'(f(z_0)) f'(z_0). \quad \square$$

2.3. Funciones trigonométricas e hiperbólicas, potencias no enteras. Considerando que

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y, \quad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y$$

así como

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x,$$

es natural extender estas funciones a todo $\mathbb{C}$ definiendo

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

De modo que valen, por ejemplo, las identidades $\cosh(iz) = \cos z$, $\sin z = -i \sinh(iz)$. Además, se obtienen las fórmulas familiares:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Por otra parte, se verifica, a partir de los resultados operacionales obtenidos para la derivación, que estas funciones son derivables en todo z y

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z,$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z, \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z.$$

2.3.1. *potencias no-enteras.* Cuando $\alpha \in \mathbb{C}$ no es un número entero, definimos la función $z \mapsto z^\alpha$ por

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z} \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + i0 \mid x \geq 0\}.$$

Usando las fórmulas encontradas para las derivadas de las funciones logaritmo y exponencial, y la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = e^{\alpha \log z} \frac{d}{dz} (\alpha \log z) = \alpha z^{\alpha-1}.$$

2.4. Convergencia de series complejas. Sea $b_k, k = 0, 1, 2, \dots$ una sucesión de números complejos. Definimos, en caso de existir, el límite

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k.$$

Decimos en tal caso, que *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *converge*. Una condición suficiente para la convergencia de una serie de números complejos es su *convergencia absoluta*. Observemos que la sucesión de números reales

$$S_n = \sum_{k=0}^n |b_k|$$

es creciente. Si además es acotada superiormente, esto es, existe $C > 0$ con $S_n \leq C$ para todo n , tenemos que S_n tiende a un límite cuando $n \rightarrow \infty$. Este límite se denota por cierto $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$. En este caso escribimos simplemente

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Tenemos el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 2.2. *Si $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ es convergente. Decimos en tal caso que esta última serie es **absolutamente convergente**.*

Demostración Tenemos que la sucesión $z_n := \sum_{k=0}^n b_k$ es acotada en $\mathbb{C}$. En efecto

$$|z_n| \leq \sum_{k=0}^n |b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| =: C < +\infty.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^2$, z_n tiene una subsucesión convergente, $z_{k_n} \rightarrow \bar{z}$. Afirmamos que $\bar{z}$ es en realidad el límite de toda

la sucesión. En efecto

$$|z_n - z_{k_n}| \leq \sum_{k=n}^{k_n} |b_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Concluimos que $z_n \rightarrow \bar{z}$, esto es, que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ es convergente. $\square$

2.5. Series de potencias. Mediante las reglas algebraicas que hemos encontrado para la derivación compleja, es inmediato que un polinomio

$f(z) = \sum_{k=0}^N a_k(z - z_0)^k$ es derivable y

$$f'(z) = \sum_{k=1}^N k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Consideremos ahora una función definida como una *serie de potencias en torno a z_0* ,

$$(2.7) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

El *radio de convergencia* de esta serie es la cantidad $r_* \leq +\infty$ dada por

$$r_* = \sup\{r > 0 / \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < +\infty\}.$$

Supongamos que $r_* > 0$, y que $|z - z_0| \leq r < r_*$. Entonces para todo k suficientemente grande tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < +\infty.$$

De este modo, la serie (2.7) converge absolutamente para todo z con $|z - z_0| < r_*$. De acuerdo a Proposición 2.2, la serie es entonces convergente para todos estos z . Afirmamos que la serie define en verdad una función derivable en

$$D(z_0, r_*) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r_*\}$$

y que

$$f'(z) = g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

La serie $g(z)$ tiene el mismo radio de convergencia de $f(z)$. En efecto, Si r es cualquier número positivo menor que r_* y $r < r' < r_*$ entonces

$kr^{k-1} \leq r'^k$ para todo $k \geq k_0$. Por ende

$$\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} \leq \sum_{k=0}^{k_0} k|a_k|r^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||r'|^k < +\infty.$$

entonces la serie $g(z)$ converge absolutamente para todo z con $|z - z_0| \leq r < r_*$.

Notemos ahora que

$$f(z+h) - f(z) - g(z)h = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k - k(z-z_0)^{k-1}h].$$

Entonces

$$|f(z+h) - f(z) - g(z)h| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k \left| \left(1 + \frac{h}{|z-z_0|}\right)^k - 1 - k\frac{h}{|z-z_0|} \right|$$

Por otra parte, notemos que si $|a| < \varepsilon$

$$|(1+a)^k - 1 - ka| \leq \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} |a|^j = \frac{1}{2}k(k-1)(1+s|a|)^{k-2}|a|^2, \quad s \in (0, 1),$$

y entonces si $|h| < \varepsilon|z - z_0|$ y $|z - z_0|(1 + \varepsilon) < r < r_*$ obtenemos

$$|f(z+h) - f(z) - g(z)h| \leq |h|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2}k(k-1)|a_k||z-z_0|^{k-2}(1+\varepsilon)^{k-2} \leq C|h|^2,$$

$$C = \sum_{k=2}^{\infty} k^2|a_k|r^{k-2} < +\infty.$$

Así, f es derivable en todo punto $z \in D(z_0, r_*)$, y $f'(z) = g(z)$. $\square$

En general, una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **holomorfa** en Ω si es derivable en el sentido complejo en todo punto de Ω . Escribimos en tal caso $f \in H(\Omega)$.

Notemos que el radio de convergencia de las series obtenidas al derivar término a término la serie de f , es siempre el mismo. Obtenemos, inductivamente que f es derivable de cualquier orden en todo punto de $D(x_0, r_*)$ y

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j+1)!} a_k (z - z_0)^{k-j}.$$

Es importante notar que de esta expresión obtenemos

$$f^{(j)}(z_0) = j!a_j,$$

de modo que la función se puede expresar en $D(z_0, r_*)$, por su *serie de Taylor*,

$$f(z) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

3. Integración compleja y fórmulas de Cauchy

3.1. Integración sobre curvas. Sea $(\mathcal{C}, \gamma)$ una curva C^1 por tramos, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define

$$(3.8) \quad \int_{\mathcal{C}} f dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Supongamos que $f = u + iv$. $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ Entonces la integral compleja la podemos escribir en términos de integrales de línea reales. En efecto, por definición tenemos que

$$(3.9) \quad \int_{\mathcal{C}} f dz := \int_a^b (ux' - vy') + i(uy' + vx') dt = \int_{\mathcal{C}} (u, -v) \cdot \hat{t} d\ell + i \int_{\mathcal{C}} (v, u) \cdot \hat{t} d\ell.$$

A partir de esta representación real, obtenemos la *desigualdad triangular*

LEMMA 3.1.

$$(3.10) \quad \left| \int_{\mathcal{C}} f dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f| d\ell.$$

Demostración Consideremos el vector en $\mathbb{R}^2$ $(P, Q) = ((u, -v) \cdot \hat{t}, (v, u) \cdot \hat{t})$ y denotemos $\int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell = (\int_{\mathcal{C}} P d\ell, \int_{\mathcal{C}} Q d\ell)$. Entonces para cada vector e con $\|e\| = 1$ tenemos

$$|e \cdot \int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell| = \left| \int_{\mathcal{C}} (P, Q) \cdot e d\ell \right| \leq \int_{\mathcal{C}} \|(P, Q)\| d\ell$$

gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Entonces si $\int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell \neq 0$ y escogemos $e = \int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell / \|\int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell\|$, obtenemos que

$$\left\| \int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell \right\| \leq \int_{\mathcal{C}} \|(P, Q)\| d\ell$$

El resultado buscado se sigue de esta última desigualdad notando que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f dz \right| = \left\| \int_{\mathcal{C}} (P, Q) d\ell \right\|$$

y que $\|(P, Q)\| = \|(u, v)\| = |f|$. □

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, recorrida en sentido positivo, y supongamos además que las funciones u, v son de clase C^1 en la región $\mathcal{D}$ encerrada por $\mathcal{C}$. Por la expresión (3.9) y el teorema de Green tenemos entonces que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = - \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Si adicionalmente suponemos que $f(z)$ es derivable compleja en $\mathcal{D}$, entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de modo que

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

y entonces $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$. Recordemos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice *simplemente conexo* si todo par de puntos de Ω puede unirse por una curva C^1 por tramos, y si toda curva C^1 por tramos, cerrada simple en Ω , encierra una región contenida en Ω . Hemos demostrado el siguiente resultado

TEOREMA 3.1 (Cauchy). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con derivada compleja f' continua. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple, C^1 por tramos en Ω . Entonces $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$.*

Este resultado es central en la teoría de funciones de variable compleja. Es de hecho también válido bajo la hipótesis más débil de que la función f sea solo derivable en el sentido complejo en todo Ω , sin suponer la continuidad. En todo caso, esto es suficiente para nuestros propósitos.

El teorema anterior nos dice, equivalentemente que en la situación descrita, el valor de la integral $\int_{\mathcal{C}} f dz$ depende sólo de los puntos inicial y final de un punto inicial y final de $\mathcal{C}$. Considerando una curva simple $\mathcal{C}_{z_0}^z$, C^1 por tramos que une los puntos z_0 y z designamos por $\int_{z_0}^z f dz$ a la integral $\int_{\mathcal{C}_{z_0}^z} f dz$.

3.2. Existencia de primitivas. El siguiente resultado puede leerse como una forma del Teorema fundamental del cálculo, para funciones holomorfas.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea Ω un abierto simplemente conexo, y f una función holomorfa en Ω con derivada $f'(z)$ continua. Sea $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$. Entonces F es holomorfa en Ω y*

$$F'(z) = f(z).$$

Demostración Escribamos $f = u + iv$. Recordemos que de la Proposición 2.1, los hechos que $\oint_C (u, -v) \cdot \hat{t} d\ell = 0$, $\oint_C (v, u) \cdot \hat{t} d\ell = 0$, para toda C cerrada simple, implican que los campos $(u, -v)$ y (v, u) son conservativos. Más precisamente, se tiene precisamente que

$$P(z) = \int_{C_{z_0}^z} (u, -v) \cdot \hat{t} d\ell, \quad z = x + iy$$

satisface

$$\frac{\partial P}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -v$$

En modo similar, la función

$$Q(z) = \int_{C_{z_0}^z} (v, u) \cdot \hat{t} d\ell, \quad z = x + iy$$

satisface

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -u$$

De este modo, la función $F = P + iQ$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto es holomorfa. Se tiene entonces que $F' = u + iv$, y la demostración se concluye. $\square$

A manera de ejemplo consideremos cualquier subdominio Ω simplemente conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por ejemplo $\mathbb{R}^2$ sin un rayo infinito emanando desde el origen. Entonces para un z_0 dado en Ω , la función

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w}$$

es una realización de la función logaritmo en Ω . Cabe señalar que para la existencia de la primitiva holomorfa no necesitamos suponer a priori que la función $u + iv$ fuera holomorfa, sino solo su continuidad y el hecho que la integral sobre curvas cerradas simples en Ω fuera igual a cero.

Por otra parte, tenemos que si F es una primitiva holomorfa de f en Ω simplemente conexo, tenemos que

$$\int_{C_{z_0}^{z_1}} f dx = F(z_1) - F(z_0)$$

sobre cualquier camino que una z_0 y z_1 .

3.3. El armónico conjugado. Sea Ω un abierto simplemente conexo en $\mathbb{C}$. Supongamos que u es una función de clase $C^2(\Omega)$, armónica en el sentido que

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Afirmamos que existe una función v , definida sobre Ω , también armónica, en modo tal que la función

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es holomorfa en Ω . Para demostrar esto, consideremos el campo vectorial $(P, Q) = (-u_y, u_x)$. Notemos que $Q_x = P_y$, por la armonicidad de u . Por el Ejemplo 3.2, concluimos que el par (P, Q) tiene un potencial v , esto es

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$$

de modo que la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω . $\square$

COROLARIO 3.1. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si $\mathcal{C}$ encierra k curvas cerradas simples disjuntas $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ en su interior, de modo que $\mathcal{C}_i = \partial \mathcal{D}_i$ y $\bar{\mathcal{D}} \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{D}_i \subset \Omega$, entonces*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{C}_i} f(z) dz$$

En que las curvas se suponen orientadas en sentido antihorario.

Demostración Consideremos primero el caso $k = 1$. Consideremos una curva $\mathcal{C}_0$ dentro de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es la región anular encerrada entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_0$. Consideremos dos puntos de $\mathcal{C}_1$ z_{01} , z_{02} y dos puntos z_1 y z_2 sobre $\mathcal{C}$. Consideremos curvas disjuntas simples, Γ_1 , Γ_2 , de clase C^1 que unen respectivamente z_{01} con z_1 y z_{02} con z_2 . Supongamos además que $\mathcal{C}_0$ está dividida en dos tramos disjuntos $\mathcal{C}_{01}$ y $\mathcal{C}_{02}$ que unen z_{01} y z_{02} en sentidos opuestos, de modo que $\mathcal{C}_{01} + \mathcal{C}_{02} = \mathcal{C}_1$. Consideramos una división similar para $\mathcal{C}$, relativa a z_1, z_2 , $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$. Logramos entonces por concatenación las curvas cerradas simples, recorridas en sentido antihorario,

$$\gamma_1 = \Gamma_1 + \mathcal{C}_1 - \Gamma_2 - \mathcal{C}_{01}, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 + \mathcal{C}_2 - \Gamma_1 - \mathcal{C}_{02}.$$

que encierran regiones contenidas en Ω . Así, por concatenación y el teorema anterior obtenemos $\int_{\gamma_i} f(z) dz = 0$, $i = 1, 2$. Por ende

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1 + \mathcal{C}_1 - \Gamma_2 - \mathcal{C}_{01}} f(z) dz + \int_{\Gamma_2 + \mathcal{C}_2 - \Gamma_1 - \mathcal{C}_{02}} f(z) dz =$$

$$\int_C f(z) dz - \int_{C_0} f(z) dz,$$

lo que prueba la afirmación en el caso $k = 1$. El caso general se sigue por inducción. $\square$

3.4. La fórmula integral de Cauchy. Otro corolario del Teorema de Cauchy, especialmente importante en aplicaciones a cálculos con funciones de variable compleja es la *fórmula de Cauchy*

TEOREMA 3.2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω con derivada f' continua en Ω . Sea C una curva en Ω , simple, cerrada, C^1 por tramos que encierra una región contenida en Ω . Sea z_0 un punto de la región encerrada por C . Vale entonces la siguiente fórmula:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

en que suponemos que C está recorrida en sentido antihorario.

Demostración Es una consecuencia del Corolario 3.1. Consideremos la curva C_δ que rodea a z_0 , parametrizada por

$$\gamma(t) = z_0 + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Por el corolario, tenemos que

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ahora, como $\gamma'(t) = \delta i e^{it}$, tenemos que

$$\int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} \delta i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt.$$

De este modo,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt = 2\pi i f(z_0),$$

y el resultado queda demostrado. $\square$

3.5. Expansión en serie de potencias de funciones holomorfas. Una consecuencia importante es el hecho que una función holomorfa con derivada continua en Ω puede expandirse en serie de potencias. Consideremos un disco $D(z_0, r_0) \subset \Omega$. Tomemos $\mathcal{C} = \partial D(z_0, r_0)$ orientada positivamente. Escribamos

$$f(z_0 + w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0 - w} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1 - \frac{w}{z - z_0}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Si $|w| < r_0$ tenemos que $\frac{|w|}{|z - z_0|} < 1$, y podemos expandir

$$\frac{1}{1 - \frac{w}{z - z_0}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}}, \quad z \in \mathcal{C}.$$

Así,

$$f(z_0 + w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0 - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Intercambiando la suma infinita con la integral, obtenemos entonces la fórmula de representación

$$(3.11) \quad f(z_0 + w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j w^j, \quad a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}} dz.$$

En efecto, el intercambio se justifica pues

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq$$

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{\pi} \max_{\mathcal{C}} |f| \ell(\mathcal{C}) \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{|w|}{r_0} \right)^{j+1}$$

y esta última cantidad tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que

$$\int_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{w^j}{(z - z_0)^{j+1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

Por otra parte, hemos obtenido que

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} d\ell \leq \max_{\mathcal{C}} |f| \ell(\mathcal{C}) \frac{1}{\pi r_0^k}.$$

De este modo, el radio de convergencia r_* de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j w^j$ se puede estimar como $r_* \geq r_0$. En efecto,

$$r_* = \sup \left\{ r > 0 / \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| r^j \right\} \geq \sup \left\{ r > 0 / \frac{1}{\pi} \max_C |f| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^j \right\} = r_0.$$

Por supuesto, esta fórmula puede también representarse por

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad |z - z_0| < r_0, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

De este modo, el radio de convergencia de la serie que representa f es al menos aquél del disco $D(z_0, r_0)$ contenido en Ω . Usando los resultados de §2.5, tenemos entonces que f es *infinitamente derivable en Ω* . Esto es, la presencia de una derivada $f'(z)$ (y su continuidad, hipótesis que no es en verdad necesaria), implica la existencia de infinitas derivadas, y la propiedad de expansión local en serie de potencias en torno a cada punto del dominio. Esta última propiedad se denomina *analiticidad*, y usaremos en modo intercambiable los términos *analítica* y *holomorfa* para una función compleja definida en una región dada.

Por otra parte, de los resultados en §2.5, sabemos además que $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ de modo que la fórmula de Cauchy resulta extendida del modo siguiente:

$$(3.12) \quad \boxed{f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz}$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

3.6. Expansión en serie de potencias de algunas funciones clásicas. Recordemos que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$ satisface $f'(z) = e^z$, de modo que $f^{(k)}(z) = e^z$ para todo $k \geq 0$. De este modo, vale la expansión en serie de potencias en torno a 0,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Esta serie podría eventualmente considerarse como una definición de la función exponencial. Su radio de convergencia es infinito.

Hemos visto también que para $f(z) = \log z$, en su dominio de definición tenemos $f'(z) = \frac{1}{z}$, y por lo tanto, para $k \geq 1$, $f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k}$. Desarrollando en serie en torno a $z = 1$, obtenemos

$$\log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (z - 1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z - 1)^k$$

una serie con radio de convergencia igual a 1.

Otras series clásicas son por ejemplo

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-z}}{2i} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{z^{2j-1}}{(2j-1)!} \\ \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}.\end{aligned}$$

3.7. Otras consecuencias de la fórmula de Cauchy. Una consecuencia clásica de (3.12) es el siguiente resultado

TEOREMA 3.3 (Liouville). *Si f es una función analítica y acotada en todo $\mathbb{C}$, entonces es constante.*

Demostración Supongamos que f es analítica y acotada en todo $\mathbb{R}^2$. De la fórmula (3.12) obtenemos entonces que (con $r_0 > 0$ arbitrario)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(z_0, r_0)} \frac{|f(z)|}{r_0^2} d\ell \leq \frac{1}{2\pi} \sup |f| r_0^{-2} 2\pi r_0$$

Haciendo $r_0 \rightarrow +\infty$ obtenemos entonces que $f'(z_0) = 0$ en todo $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Como sabemos, esto implica que el diferencial real de f es también idénticamente nulo, y que esto implica que f es constante. $\square$

Otra consecuencia famosa es la siguiente.

TEOREMA 3.4 (Teorema fundamental del Álgebra). *Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz.*

Demostración Supongamos lo contrario, esto es que algún polinomio $f(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_0$ no tiene raíz alguna. Entonces la función $\frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y claramente satisface

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Se sigue que la función $\frac{1}{f(z)}$ es analítica y acotada en todo $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville concluimos que esta función es constante, lo cual es una contradicción.

A partir de este resultado se sigue que un polinomio mónico complejo de grado k tiene exactamente k raíces complejas, contando multiplicidades. En efecto, Si z_0 es una raíz de $f(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_0$, entonces $f(z)$ es divisible por $(z - z_0)$: existe un polinomio mónico $g(z)$ de grado $k - 1$ tal que $f(z) = (z - z_0)g(z)$. Si $k - 1 \geq 1$, aplicamos

el resultado del Teorema ahora a $g(z)$. Iterando se obtiene el resultado deseado. $\square$

3.8. La fórmula de los residuos. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Consideraremos ahora funciones f analíticas sobre $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Supondremos además que las posibles singularidades z_i de f son **polos de orden finito**. Esto quiere decir que para cada $j = 1, \dots, n$ existe un entero $k_j \geq 0$ minimal tal que la función $(z - z_j)^{k_j} f(z)$ es analítica cerca de z_j . El menor de estos enteros se denomina el **orden** del polo z_j .

De este modo, para $0 < |z - z_j| < r$, la función f puede representarse como una serie

$$(z - z_j)^{k_j} f(z) = b_0 + b_1(z - z_j) + b_2(z - z_j)^2 + \dots$$

y por ende

$$f(z) = \frac{a_{-k_j}}{(z - z_j)^{k_j}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_j} + a_0 + a_1(z - z_j) + \dots$$

A esta expansión en torno a una singularidad de orden finito se le denomina *desarrollo de Laurent*. Al número a_{-1} se le denomina el **residuo** de f en el polo z_j . Se denota habitualmente $\text{Res}(f, z_j)$.

La **fórmula de los residuos** es una extensión de la fórmula integral de Cauchy. Una observación inicial es que en el contexto de esta última fórmula, si anotamos $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ entonces $\text{Res}(g, z_0) = f(z_0)$ y la fórmula integral de Cauchy se lee

$$\int_{\mathcal{C}} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, z_0).$$

Este resultado se extiende del modo siguiente.

TEOREMA 3.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con polos de orden finito en los puntos $z_1, \dots, z_k$. Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, C^1 por tramos contenida en Ω , orientada en sentido positivo, y que encierra una región contenida en Ω y a los puntos z_j , entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

Demostración Consideremos, para un número δ suficientemente pequeño, discos $D(z_j, \delta)$ que estén encerrados por $\mathcal{C}$. Denominamos $\mathcal{C}_j$ a la frontera de este disco, parametrizada por

$$\gamma_j(t) = z_j + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Tenemos entonces que

$$(3.13) \quad \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f(z) dz,$$

y por otra parte

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_j + \delta e^{it}) \delta i e^{it} dt.$$

Ahora, como en un entorno de z_j tenemos una expansión de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-k_j}}{(z - z_j)^{k_j}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_j} + a_0 + a_1(z - z_j) + \cdots$$

se sigue que

$$\int_{C_j} f(z) dz = i \sum_{j=-k_j}^{\infty} a_j \delta^{j+1} \int_0^{2\pi} e^{(j+1)it} dt.$$

Ahora $\int_0^{2\pi} e^{(j+1)it} dt = 0$ para $j \neq -1$ y $= 2\pi$ para $j = -1$. Por lo tanto,

$$\int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j)$$

y el resultado deseado se sigue de (3.13). $\square$

COROLARIO 3.2. *Sea f una función analítica en el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$, excepto por un número finito de polos de orden finito $z_1, \dots, z_k \in H$. Supongamos además que para cierto $p > 1$ y todo $|z|$ suficientemente grande, $|f(z)| \leq C|z|^{-p}$. Entonces se tiene que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sum_{j=1}^k 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Demostración Consideremos, para un número $R > 0$ suficientemente grande, el camino formado por $\Gamma_R + C_R$ donde Γ_R está parametrizado por $\gamma_1(x) = x$, $x \in [-R, R]$, y C_R por $\gamma_2(\theta) = R e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Para R suficientemente grande tenemos que

(3.14)

$$\oint_{\Gamma_R + C_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \sum_{j=1}^k 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Por otro lado

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

y

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| d\ell \leq CR^{-p} \ell(C_R) = 2\pi CR^{1-p}$$

de modo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

y el resultado se sigue haciendo $R \rightarrow +\infty$ en (3.14). $\square$

EJEMPLO 3.1. *Calcular*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Solución Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Los polos de f son los ceros de $1+z^4$ que están en el semiplano superior son $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$.

Tenemos que

$$\text{Res}(f, z_i) = \frac{z_i^2}{4z_i^3} = \frac{1}{4z_i}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i), \quad \text{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-i-1).$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{8}(-2i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

EJEMPLO 3.2. *Calcule la integral*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

Solución Para un $R > 0$ dado, consideremos el camino rectangular cerrado, recorrido en sentido antihorario,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4$$

donde los $\mathcal{C}_i$ están parametrizados respectivamente por

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [-R, R],$$

$$\gamma_2(t) = R + it, \quad t \in [0, R],$$

$$\gamma_3(t) = iR + t, \quad t \in [-R, R],$$

$\gamma_4(t) = -R + it, t \in [0, R]$.

Entonces, por residuos encontramos que para R grande, y $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai) = 2\pi i \frac{aie^{-a}}{2ai} = -\pi e^{-a} i.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{te^{it}}{t^2 + a^2} dt - \int_{-R}^R \frac{(iR + t)e^{i(iR+t)}}{(iR + t)^2 + a^2} dt \\ &+ \int_0^R \frac{(R + it)e^{i(R+it)}}{(R + it)^2 + a^2} dt - \int_0^R \frac{(-R + it)e^{i(-R+it)}}{(-R + it)^2 + a^2} dt. \end{aligned}$$

Tenemos,

$$\left| \int_0^R \frac{(R + it)e^{i(R+it)}}{(R + it)^2 + a^2} dt \right| \leq \int_0^R \left| \frac{(R + t)e^{-t}}{R^2 - a^2} \right| dt \leq \frac{C}{R}$$

y en modo similar

$$\left| \int_0^R \frac{(-R + it)e^{i(-R+it)}}{(-R + it)^2 + a^2} dt \right| \leq \frac{C}{R}$$

y

$$\left| \int_{-R}^R \frac{(iR + t)e^{i(iR+t)}}{(iR + t)^2 + a^2} dt \right| \leq \frac{C}{R}$$

De este modo los tres últimos términos en la expansión de la integral tienden a cero si $R \rightarrow +\infty$ mientras que del primero finalmente deducimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{it}}{t^2 + a^2} dt = -\pi e^{-a} i.$$

De aquí se sigue, por paridad, que

$$\int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

□

EJEMPLO 3.3. *Evaluar la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}.$$

Solución Sea $\mathcal{C}$ el círculo parametrizado por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z - z^{-1}}{2i}} = \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

donde

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

El denominador tiene dos ceros, que resultan ser $z_1 = -i(2 - \sqrt{3})$ y $z_2 = -i(2 + \sqrt{3})$. Notemos que $|z_1| < 1$ y $|z_2| > 1$. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{4\pi i}{(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

Una observación es que el método de este ejemplo se extiende en modo natural al cálculo de integrales del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{p(\sin \theta, \cos \theta)}{q(\sin \theta, \cos \theta)} d\theta$$

donde p, q son polinomios en dos variables. En efecto, tenemos que

$$I = \int_{\mathcal{C}} R(z) dz, \quad R(z) = \frac{p}{q} \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2} \right) \frac{1}{iz}.$$

en la medida que R no tenga polos sobre $\mathcal{C}$. Una vez conocidos los polos dentro del disco unitario, $z_1, \dots, z_k$ la integral puede calcularse mediante residuos, de modo que

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(R, z_j).$$

EJEMPLO 3.4. *Calcular*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Solución Consideremos el camino cerrado, recorrido en sentido antihorario, constituido por

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^6 \mathcal{C}_j$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= (-R, -\delta], \quad \mathcal{C}_2 = \{|z| \leq \delta, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \quad \mathcal{C}_3 = (\delta, R], \\ \mathcal{C}_4 &= R + i[0, R], \quad \mathcal{C}_5 = iR + [-R, R], \quad \mathcal{C}_6 = -R + i[0, R] \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ya que el integrando no tiene singularidades en la región dentro de la curva. Vemos que cuando $R \rightarrow +\infty$,

$$\int_{C_5} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{-R^R} \frac{e^{i(x+iR)}}{iR+x} dx = O(e^{-R}) \rightarrow 0.$$

Por otra parte

$$\int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^R \frac{e^{iR}e^{-y}}{R+iy} dy = \int_0^1 \frac{e^{iR}e^{-Ry}}{1+iy} dy \rightarrow 0$$

y en modo similar $\int_{C_6} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$. Obtenemos entonces que

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i \int_0^{\pi} e^{i\delta(\cos\theta+i\sin\theta)} d\theta$$

de modo que, tomando parte imaginaria y haciendo $\delta \rightarrow 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

o sea

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

□

El ejemplo anterior se generaliza al cálculo de una integral de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx$$

en que suponemos que P y Q son polinomios con $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 1$ y que $f(z) = e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)}$ tiene un número finito de polos **simples** (esto es, de orden 1) sobre el eje real: $x_1, x_2, \dots, x_m$, y además un número finito de polos $z_1, \dots, z_k$ en el semiplano superior. Llegamos en tal caso, con un argumento enteramente análogo al del ejemplo anterior, a la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) + \pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, x_j).$$

EJEMPLO 3.5. *Calcular la integral*

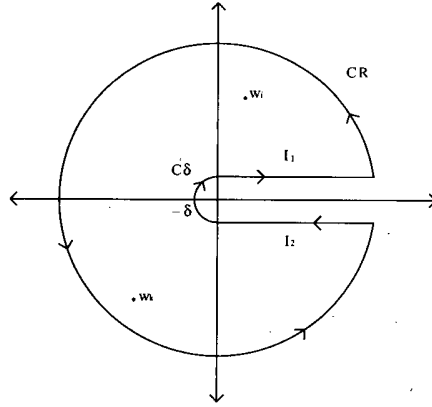
$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx$$

donde P es un polinomio de grado ≥ 1 , con $P(x) \neq 0$ para todo $x \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$.

Solución consideremos la función $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}$ donde en la definición de la potencia no entera, consideramos el argumento definido en $(0, 2\pi)$. Observemos que

$$z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg(z)}$$

Tomemos el camino $\mathcal{C}_{R,\delta}$ de la figura, constituido por los arcos de círculos de radios C_δ y C_R y los segmentos I_1 e I_2 , orientados como se indica.



Observemos primero que

$$\left| \int_{C_\delta} f(z) dz \right| \leq C \int_{C_\delta} |z|^{\alpha-1} d\ell = \pi C \delta^\alpha \rightarrow 0$$

cuando $\delta \rightarrow 0$. Por otra parte,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq C R^{\alpha-1} \int_{C_R} \frac{d}{l} R \leq C R^{\alpha-1} \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow +\infty$. Por otra parte, cuando $R \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\int_{I_1} f(z) dz \rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx$$

y

$$\int_{I_2} f(z) dz \rightarrow -e^{i(\alpha-1)2\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx$$

Entonces, por la fórmula de los residuos aplicada en $\mathcal{C}_{R,\delta}$, obtenemos en el límite,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i(\alpha-1)2\pi}} \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z), w_j)$$

donde los w_j son los polos de $f(z)$. □

A manera de ilustración, calculemos, para $0 < \alpha < 1$ la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Para $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ tenemos que $\text{Res}(f(z), -1) = e^{i\pi(\alpha-1)}$. De este modo,

$$I = \frac{2\pi i e^{i(\alpha-1)\pi}}{1 - e^{i(\alpha-1)2\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

EJEMPLO 3.6. *Calcule*

$$I = \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde P y Q son polinomios, con $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 2$ y Q no tiene ceros en el semieje real positivo.

Solución Consideremos el camino $\mathcal{C}_{\delta,R}$ del ejemplo anterior, y la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \log z, \quad \log z = \log |z| + i \arg(z)$$

donde, como antes, tomamos $\arg(z)$ variando entre 0 y 2π . En modo análogo al ejemplo anterior, obtenemos

$$\left| \int_{C_\delta} f(z) dz \right| \leq C\delta \log \frac{1}{\delta} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq CR^{-1} \log R \rightarrow 0$$

cuando $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. Por otra parte,

$$\int_{I_1} f(z) dz \rightarrow \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \log x dx$$

y

$$\int_{I_2} f(z) dz \rightarrow - \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} (\log x + 2\pi i) dx.$$

De este modo, sumando, y usando residuos, obtenemos ahora

$$-2\pi i \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, w_j).$$

Ilustremos esta fórmula mediante el cálculo de la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$$

Tenemos ahora que

$$I = -\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) - \operatorname{Res}(f, e^{i\pi}) - \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{5}{3}\pi})$$

con $f(z) = \frac{\log z}{1+z^3}$. Usando la fórmula

$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{\log w}{3w^2},$$

válida en cada uno de los polos, obtenemos

$$\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) = -\frac{\pi}{9}i \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{i\pi}) = \frac{\pi}{3}i, \quad \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{5}{3}\pi}) = -\frac{5\pi}{9}i \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Finalmente,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.$$

Series de Fourier y Separación de variables en EDP

1. Separación de variables: motivación de las series de Fourier

En este capítulo veremos fórmulas de representación para algunas ecuaciones en derivadas parciales (EDP) que corresponden a modelos matemáticos clásicos de la física. El deseo de obtener fórmulas para las soluciones de cierta EDP que Joseph Fourier introdujo como modelo para la propagación del calor en 1822, le motivó a afirmar que toda función *razonable* $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ podría expresarse como una serie infinita de múltiplos de las funciones trigonométricas $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, conocidas en el día de hoy como *series de Fourier*. Fourier postuló su célebre ley de conducción del calor, enunciando que la temperatura $T(x, t)$ del punto x de una barra, representada por el intervalo $[0, \ell]$ en el instante $t > 0$, verifica la ecuación en derivadas parciales

$$(1.15) \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{para todo } x \in (0, \ell), \quad t \in (0, \infty).$$

Fourier buscó primero soluciones de esta ecuación que *separaran variables*, lo que quiere decir que se puede escribir como múltiplo de una función de x y de una de t .

$$T(x, t) = u(x)v(t).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.15) obtenemos $u(x)v'(t) = u''(x)v(t)$ o, dicho de otro modo, para cierta constante λ se debe tener

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda$$

Como $v'(t) = \lambda v(t)$, tenemos entonces las soluciones dadas por múltiplos de $e^{-\lambda t}$. No es razonable que sin influencia externa alguna la temperatura crezca sino lo opuesto. Por ello suponemos $\lambda > 0$. La ecuación para u queda

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por combinaciones lineales de las funciones $\sin(\sqrt{\lambda}x)$, $\cos(\sqrt{\lambda}x)$. De este modo obtenemos las soluciones *separadas* de (1.15) como las funciones de la forma

$$T_{\lambda}(x, t) = e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Es razonable pensar que para determinar la temperatura $T(x, t)$ de la barra en todo instante, se debe conocer la temperatura en todo instante en los extremos de la barra, y la temperatura en el instante inicial en toda la barra.

Así, supongamos por ejemplo que

$$(1.16) \quad T(x, 0) = f(x), \quad T(0, t) = 0, \quad T(\ell, t) = 0.$$

La primera condición, con la función $f(x)$ conocida se llama **condición inicial**. Las otras dos, en los extremos se denominan **condiciones de borde de tipo Dirichlet**. Entre las soluciones básicas, aquéllas que satisfacen las condiciones de borde son precisamente para $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}$, $k \in \mathbb{N}$ y

$$T_k(x, t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Ahora bien, como la ecuación (1.15) es *lineal*, se sigue que toda combinación lineal de ellas también es solución. Es también esperable que si la combinación lineal se vuelve infinita, esto es una serie de la forma

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

entonces, bajo hipótesis adecuadas en los coeficientes, debiera tenerse que esta expresión es también solución. Si además tenemos que

$$(1.17) \quad T(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

tendríamos una solución del problema (1.15) con condiciones iniciales y de borde (1.16). Este es el origen de las **Series de Fourier**.

En caso de ser válida una expansión de esta clase, podemos calcular los coeficientes mediante las fórmulas

$$\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{j\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Notando que, después de un cálculo directo,

$$(1.18) \quad \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{j\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

obtenemos que los coeficientes a_k en (1.17) se calculan como

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Si en vez de condiciones de borde de tipo Dirichlet imponemos las condiciones iniciales, y de borde de *aislamiento*,

$$(1.19) \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad T_x(0, t) = 0, \quad T_x(\ell, t) = 0.$$

llamadas **condiciones de borde de tipo Neumann**, vemos que entre las soluciones básicas, aquéllas admisibles son $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$T_k(x, t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

de modo que la serie

$$(1.20) \quad T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

será solución de la ecuación (1.15) con condiciones iniciales y de borde (1.19), siempre que

$$(1.21) \quad \boxed{T(x, 0) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)}$$

Los coeficientes se calculan en este caso mediante las fórmulas

$$\int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \int_0^\ell \cos\left(\frac{j\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Tenemos ahora

$$(1.22) \quad \int_0^\ell \sin\left(\frac{j\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \begin{cases} \ell & \text{si } j = k = 0 \\ \frac{\ell}{2} & \text{si } j = k \geq 1 \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

obtenemos que los coeficientes a_k en (1.17) se calculan como

$$\boxed{b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \geq 1, \quad b_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx}$$

Los dos casos retratados pueden ser considerados como un caso especial de una función $\tilde{f}(x)$ definida en el intervalo $[-\ell, \ell]$ obtenida como *extensión* de $f(x)$, respectivamente impar y par definidas por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\ell, 0] \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \ell] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-\ell, 0] \end{cases}$$

La primera es natural tomando en consideración que $f(0) = 0$, y la segunda de $f'(0) = 0$. Observemos que las extensiones $\tilde{f}(x)$ en ambos casos son **periódicas**, en el sentido que se extienden naturalmente a una función periódica de período 2ℓ en toda la recta, y diferenciable en caso que $f(x)$ lo sea, esto en consideración a que en ambos casos

$$(1.23) \quad \tilde{f}(-\ell) = \tilde{f}(\ell), \quad \tilde{f}'(-\ell) = \tilde{f}'(\ell).$$

Cabe hacer notar que las soluciones básicas satisfacen estas condiciones de (1.15) si y solamente si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$T(x, t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad T(x, t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

lo que está asociada a una solución (periódica en $\mathbb{R}$) de (1.15) de la forma, en $[-\ell, \ell]$,

$$T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \left[a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right].$$

2. Cálculo de algunas Series de Fourier

La pregunta más general es si una función $f(x)$, definida en $[-\ell, \ell]$ admite una expansión del tipo

$$(2.24) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \cos\left(\frac{2k\pi}{\ell}x\right), \quad x \in [-\ell, \ell].$$

Tomando en consideración el hecho que

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{j\pi}{\ell}x\right) dx = 0,$$

obtenemos las fórmulas

$$(2.25) \quad a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx,$$

$$(2.26) \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \geq 1, \quad b_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx.$$

Es importante notar que si f es impar en $[-\ell, \ell]$, $f(-x) = -f(x)$, entonces $b_k = 0$ y $a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx$, y recuperamos la **serie de senos** (1.17). Similarmente, si f es par, recuperamos la **serie de cosenos** (1.21)

EJEMPLO 2.1. *Encuntre la serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[-\ell, \ell]$*

Solución Tenemos que la serie es de senos solamente, por la imparidad de f . Calculemos

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx &= -\frac{\ell}{k\pi} x \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_{x=0}^{x=\ell} + \frac{\ell}{2k\pi} \int_0^\ell \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \\ &= -\frac{\ell^2}{k\pi} \cos(k\pi) = (-1)^{k-1} \frac{\ell^2}{k\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_k = (-1)^{k-1} \frac{2\ell}{k\pi}$. La serie de Fourier de $f(x) = x$ es

$$(2.27) \quad S(x) = \frac{2\ell}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

EJEMPLO 2.2. *Encuntre la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-\ell, \ell]$*

Solución Tenemos que la serie es de cosenos solamente, por la paridad de f . Calculemos

$$b_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{\ell^2}{3}.$$

Para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x^2 \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{2}{k\pi} x^2 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_0^\ell - \frac{4}{k\pi} \int_0^\ell x \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{k\pi} x^2 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \frac{4\ell}{k^2\pi^2} x \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_0^\ell - \frac{4\ell}{k^2\pi^2} \int_0^\ell \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{k\pi} x^2 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \frac{4\ell}{k^2\pi^2} x \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) - \frac{4\ell^2}{k^3\pi^3} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_0^\ell = \frac{4\ell^2}{k^2\pi^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Así, la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-\ell, \ell]$ está dada por

$$(2.28) \quad S(x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

En particular, de reflejar esta expansión efectivamente a la función x^2 en $x = \ell$, obtendríamos

$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi).$$

y llegaríamos a la hermosa fórmula

$$(2.29) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

EJEMPLO 2.3. Consideremos ahora la función discontinua, definida en $[-\ell, \ell]$,

$$f(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } -\ell \leq x < 0, \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Encuentre su serie de Fourier.

Solución Encontremos primero los coeficientes para los cosenos.

$$b_0 = \frac{1}{2\ell} \left[\int_{-\ell}^0 \ell dx + 2 \int_0^{\ell} x dx \right] = \ell.$$

Para $k \geq 1$,

$$b_k = \frac{1}{\ell} \left[\int_0^{\ell} 2x \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx + \int_{-\ell}^0 \ell \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx \right]$$

La segunda integral es claramente cero. La primera,

$$\int_0^{\ell} x \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell}{k\pi} x \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{\ell}{k\pi} \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell^2}{k^2\pi^2} [\cos(k\pi) - 1].$$

Así,

$$b_k = \frac{2\ell}{k^2\pi^2} [(-1)^k - 1].$$

Por otra parte, para $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\ell} \left[\int_0^{\ell} 2x \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx + \int_{-\ell}^0 \ell \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx \right]$$

La primera integral la calculamos en un ejemplo anterior:

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} 2x \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = -(-1)^k \frac{2\ell}{k\pi}$$

La segunda,

$$-\frac{\ell^2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \Big|_{-\ell}^0 = ((-1)^k - 1) \frac{\ell}{k\pi}.$$

y encontramos finalmente

$$a_k = -((-1)^k + 1) \frac{\ell}{k\pi}.$$

La serie de Fourier de $f(x)$ es entonces

(2.30)

$$S(x) = \ell + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{k^2\pi^2} [(-1)^k - 1] \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{k\pi} [(-1)^k + 1] \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

La teoría de las series de Fourier trata de determinar la validez de la expansión (2.24) para una función arbitraria definida en $[-\ell, \ell]$. En particular se trata de determinar para qué valores de x se tiene que $S(x) = f(x)$ en los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3. Esta convergencia es cierta en gran generalidad, como enuncia el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1. *Sea $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua por tramos. Consideremos su serie de Fourier*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

con los coeficientes a_k y b_k dados por las fórmulas (2.25) y (2.26). Supongamos que $x \in (-\ell, \ell)$ es tal que los límites $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$ existen, así como las derivadas laterales, $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$. Entonces

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

En particular, si f es diferenciable en x , entonces $S(x) = f(x)$.

No haremos aquí la demostración de este resultado fundamental de convergencia de las series de Fourier. Indicamos sí un corolario.

COROLARIO 2.1. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si los límites $f(\ell^-)$ y $f(-\ell^+)$ existen, así como las derivadas laterales, $f'(\ell^-)$ y $f'(-\ell^+)$, entonces*

$$S(-\ell) = S(\ell) = \frac{1}{2}(f(-\ell^+) + f(\ell^-)).$$

Demostración Consideremos la función $\bar{f}(x)$ definida en $[-\ell, \ell]$ por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x + \ell) & \text{si } -\ell \leq x \leq 0, \\ f(x - \ell) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Llamemos $\bar{S}(x)$ a la serie de Fourier de $\bar{f}$. Calculemos los coeficientes de esta serie. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \bar{f}(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx &= \int_{-\ell}^0 f(x+\ell) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx + \int_0^{\ell} f(x-\ell) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx \\ &= \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}(x-\ell)\right) dx + \int_{-\ell}^0 f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}(x+\ell)\right) dx = \end{aligned}$$

$$\cos(k\pi) \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx$$

y similarmente

$$\int_{-\ell}^{\ell} \bar{f}(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \cos(k\pi) \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\pi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \cos(k\pi) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = \\ \bar{S}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}(x+\ell)\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}(x+\ell)\right). \end{aligned}$$

De modo que

$$\bar{S}(x) = S(x+\ell).$$

De acuerdo al teorema anterior,

$$S(\ell) = \bar{S}(0) = \frac{1}{2}(\bar{f}(0^-) + \bar{f}(0^+)) = \frac{1}{2}(f(\ell^-) + f(-\ell^+))$$

y el resultado queda demostrado. $\square$

Observación. Como ejemplos, vemos que efectivamente, de acuerdo a lo calculado en los Ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 tenemos

$$x = \frac{2\ell}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

para todo $x \in (-\ell, \ell)$. Mientras que en $x = 0, \ell$ la serie es igual a 0 que corresponde al promedio de los valores en los extremos como se predice en el corolario anterior.

Por otra parte, tenemos que para todo $x \in [-\ell, \ell]$ vale la fórmula

$$x^2 = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

En particular evaluando en $x = \ell$, obtenemos la validez de la clásica fórmula (2.29).

Por otra parte, tenemos que, evaluando en $x = 0$ la serie en el Ejemplo 2.3,

$$\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \ell + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{k^2\pi^2} [(-1)^k - 1].$$

Observación. Notemos que la serie $S(x)$ es una función en verdad definida en todo $x \in \mathbb{R}$ y es 2ℓ -periódica en el sentido que $S(x + 2\ell) = S(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\tilde{f}(x)$ la extensión 2ℓ -periódica de $f(x)$ definida como

$$\tilde{f}(x) := f(x - 2k\ell), \text{ para } x \in (2k\ell, 2(k+1)\ell], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces el resultado del Teorema se aplica en todo punto de $\mathbb{R}$: Por ejemplo, $S(x) = \tilde{f}(x)$ en todo punto donde $\tilde{f}$ es diferenciable.

3. Otras EDP clásicas

El método de separación de variables se extiende a otros contextos. Por ejemplo

3.1. la Ecuación de ondas unidimensional o Ecuación de la cuerda vibrante. Esta es la ecuación

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in [0, \ell], \quad t > 0$$

En este caso, una cuerda de extremos fijos 0 y ℓ en el eje x , se describe en su deformación vibratoria en el instante t como una función $y = u(x, t)$ con $u(0, t) = 0 = u(x, \ell)$ las soluciones básicas de variables separables se calculan escribiendo $u(x, t) = v(x)w(t)$. Sustituyendo obtenemos la relación

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

Buscando soluciones acotadas, esto se logra con $\lambda > 0$. Las soluciones separadas ahora son

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{\lambda}t) \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \sin(\sqrt{\lambda}t) \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ \cos(\sqrt{\lambda}t) \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \cos(\sqrt{\lambda}t) \cos(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Para lograr la validez de las condiciones de borde, necesitamos $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}$ y seno en la variable espacial. Así, la solución se expresa como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \left[a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) \right].$$

Para determinar la solución, necesitamos ahora dos condiciones iniciales: forma inicial de la cuerda, $u(x, 0) = f(x)$ y velocidad inicial de sus puntos, $u_t(x, 0) = g(x)$. Así, necesitamos entonces determinar los coeficientes de Fourier en la serie de senos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

$$g(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{\ell} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right).$$

3.2. El Problema de Dirichlet para la Ecuación de Laplace. Esta es la ecuación

$$\Delta u \quad \text{in } \Omega$$

$$u = g \quad \text{on } \Omega$$

3.2.1. Rectángulo. Si por ejemplo Ω es el rectángulo $(0, \pi) \times (0, \ell)$ y se supone como dato conocido los valores de borde $g(0, y) = 0$, $g(\pi, y) = 0$, $g(x, 0)$, $g(x, \ell)$, entonces podemos aplicar el método de separación de variables.

$$u(x, y) = v(x)w(y), \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda$$

Para lograr la condición de borde $v(0) = v(\pi) = 0$ necesitamos considerar $\lambda = k^2$ y las soluciones básicas

$$\sin(kx)e^{-ky}, \quad \sin(kx)e^{ky}$$

Y así, queremos

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)e^{-ky} + b_k \sin(kx)e^{ky}$$

en modo que

$$g(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \sin(kx), \quad g(x, \ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) (a_k e^{-k\ell} + b_k e^{k\ell})$$

Suponiendo que los datos pueden expandirse como

$$g(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx), \quad g(x, \ell) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin(kx)$$

obtenemos que (a_k, b_k) se obtiene luego de resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-k\ell} & e^{k\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_k \\ e_k \end{bmatrix}.$$

3.2.2. banda semi-infinita. Si $\Omega = (0, \pi) \times (0, \infty)$ e imponemos condiciones laterales iguales a cero, y en $y = 0$ una función $g(x, 0)$ dada, más la restricción global que la solución sea acotada, vemos que la única combinación admisible es

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) e^{-ky}.$$

con

$$g(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx).$$

3.2.3. Un disco. Consideremos ahora el caso en que $\Omega = D(0, 1)$ y la condición de borde es una función $g(\theta)$ dada. En este caso, buscamos soluciones de la forma

$$u(r, \theta) = v(r)w(\theta).$$

El Laplaciano en coordenadas polares es

$$\Delta u(r, \theta) = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2},$$

como se obtiene de la expresión (7.19) en cilíndricas, y la separación de variables nos conduce a

$$\frac{r^2}{v(r)}(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)) = -\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = \lambda$$

Como necesitamos que $w(\theta)$ sea 2π -periódica, esto nos fuerza a $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ y

$$w'' + k^2 w = 0, \quad v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) - \frac{k^2}{r^2}v(r) = 0.$$

lo que conduce a

$$w(\theta) = \sin \theta, \cos \theta, \quad v(r) = r^k, r^{-k}$$

La función r^{-k} no es admisible si queremos una solución definida en todo el disco. Entonces, buscamos una solución de la forma

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \sin(k\theta) + b_k r^k \cos(k\theta)$$

y queremos que

$$u(1, \theta) = g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\theta) + b_k \cos(k\theta).$$