

MA2002-1-Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Carlos Román, Rodolfo Núñez



Auxiliar 4

15 de abril de 2013

P1. (a) El objetivo de este problema es probar el siguiente

Teorema 1 (Pappus). Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ una curva regular simple y $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una recta, tales que $\mathcal{C} \cap \Gamma = \emptyset$. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie generada por $\mathcal{C}$ al girar en torno a Γ . Entonces S es una superficie regular con área dada por $A(S) = l(\mathcal{C})d$, donde $l(\mathcal{C})$ es la longitud de $\mathcal{C}$ y d es la distancia recorrida por el centro de masa de $\mathcal{C}$, cuyas coordenadas son $\left(\frac{1}{L(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} x d\vec{l}, \frac{1}{L(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} y d\vec{l} \right)$, al girar.

Para ello, suponga que Γ es el eje Y , y que $\mathcal{C}$ está contenida en el semiplano derecho.

- 1) Denote por $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Encuentre una parametrización regular de S en términos de $\vec{\gamma}$.
 - 2) Pruebe que $A(S) = 2\pi \int_{\mathcal{C}} x d\vec{l}$.
 - 3) Concluya.
- (b) Aplique el resultado anterior para calcular el área de la superficie generada por el cuadrado con vértices $(1, -1)$, $(3, -1)$, $(3, 1)$, $(1, 1)$ al girar en torno al eje Y .
- (c) Pruebe que el centro de masa de cualquier elipse $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ es igual a su centro

P2. Considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + y \sin(x - y), -y + y \sin(x - y), (x^2 + y^2)^{1/4} - z \sin(x - y)).$$

- (a) ¿En qué región puede afirmar que $\vec{F}$ es de clase C^1 ?
- (b) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\mathcal{A},$$

donde S es la superficie $x^2 + y^2 = e^z$, $0 \leq z \leq 1$, orientada según normales $\hat{n}$ que apunten alejándose del eje z .