

P3

Examen

MA 2001

2013

(a)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Si vemos a z como una variable definida de forma implícita por las variables independientes x, y , podemos derivar (1) de forma implícita

(1) $\quad / \frac{\partial}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}} \quad (2)$$

Para obtener $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ podemos derivar (2) c/

$$- \frac{c^2}{a^2} \left(z - x \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

P3

Examen

MA 2001

2013

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Si vemos a z como una variable definida de forma implícita por las variables independientes x, y , podemos derivar (1) de forma implícita

$$(1) \quad / \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}} \quad (2)$$

Para obtener $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ podemos derivar (2) c/

$$c^2 \left(z - x \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{c^2}{a^2} \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}} \quad (2)$$

Para obtener $\frac{d^2 z}{dx^2}$ derivamos (2) c/r a x:

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{(z - x \frac{dz}{dx})}{z^2}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -\frac{c^2}{a^2} \frac{(z + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{z})}{z^2} \quad (3)$$

Para obtener $\frac{dz}{dy}$ derivamos implícitamente (1) c/r a y:

$$\Rightarrow \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{dz}{dy} = 0$$

$$\boxed{\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}} \quad (4)$$

Para obtener $\frac{\partial z}{\partial y}$ derivamos implícitamente (1) c/r a y :

$$\Rightarrow \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{dz}{dy} = 0$$

$$\boxed{\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}} \quad (4)$$

Análogamente, derivamos (4) c/r a y para obtener

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2}{b^2} \left(z + \frac{c^2}{b^2} \frac{y^2}{z} \right) \quad (5)$$

Otra forma de hacer esto, es despejar explícitamente z a partir de (1), para luego derivar:

$$(1) \Rightarrow$$

$$\boxed{z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (6)$$

derivando (6) c/r a x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C \frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{C}{a^2} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\stackrel{(6)}{=} -\frac{C^2}{a^2} \frac{x}{z}$$

que equivale a la fórmula despejada en (2), por lo tanto, con este método se llega a las mismas soluciones.

Ahora, para obtener la ec. del plano tangente, si se ve al lugar geométrico de los puntos que satisfacen (1) como el grafo de $f(x, y)$:

$$z = C \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = f(x, y)$$

el gradiente se indefinire en el punto especificado
 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0)$!!!

el gradiente se indefinire en el punto especificado
 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0)$!!!

Otra forma de ver a este lugar geométrico es como el conjunto de nivel de la función
 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en 1

ie, los pntos que satisfacen (1) son aquellos puntos del conjunto de nivel:

$$N_1(f) = \{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 1 \}$$

y el plano tangente a este conjunto en $\vec{x}_0 = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0)$ está dado por la ec.

$$\nabla f(\vec{x}_0)^t \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/b^2 \\ z/c^2 \end{pmatrix}$$

1e, los pntos que satisfacen (1) son aquellos puntos del conjunto de nivel:

$$N_1(t) = \{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 1 \}$$

y el plano tangente a este conjunto en $\vec{x}_0 = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0)$ está dado por la ec.

$$\nabla f(\vec{x}_0)^t \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/b^2 \\ z/c^2 \end{pmatrix}$$

Entonces (7) queda como:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} x - a/\sqrt{2} \\ y - b/\sqrt{2} \\ z \end{pmatrix} = 0$$

lo que finalmente queda:

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{y}{\sqrt{2}b} - 1 = 0$$

$$(b) \quad \min \quad x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_3 = 1$$

El Lagrangiano de este problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = & x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & + \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 1) \\ & + \mu(2x_1 - x_3 - 1) \end{aligned}$$

$$\nabla \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \\ + \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 1) \\ + \mu(2x_1 - x_3 - 1)$$

$$\nabla \mathcal{L} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{x_1} = 2x_1 + 4x_2 + \lambda + 2\mu = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = 4x_1 + 2x_2 - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_{x_3} = 2x_3 + \lambda - \mu = 0 \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda} = x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_{\mu} = 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \quad (5)$$

Estas ecuaciones equivalen al sistema lineal
(Pivotando)

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$L_{x_3} = 2x_3 + \lambda - \mu = 0 \quad (3)$$

$$L_{\lambda} = \lambda_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$L_{\mu} = 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \quad (5)$$

Estas ecuaciones equivalen al sistema lineal
(Pivotando)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 6/13 \\ \lambda &= 8/13 \\ x_3 &= -1/13 \\ x_2 &= -8/13 \\ x_1 &= 6/13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13/3 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = 6/13$$

$$\lambda = 8/13$$

$$x_3 = -1/13$$

$$x_2 = -8/13$$

$$x_1 = 6/13$$