Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
27 de Julio de 2013

Guía de Problemas: Integración

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Juan Pablo Donoso, Gianfranco Liberona, Valentina Toro.

[Sumas de Riemann y Conjuntos Jordan-medible]

P1. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ irreducible} \end{cases}$$

Pruebe que f es integrable y calcule el valor de la integral.

P2. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto acotado. Demuestre que

(a) $\overline{\int\limits_D}(f+g) \leq \overline{\int\limits_D} f + \overline{\int\limits_D} g$

(b) $\underline{\int}_D (f+g) \geq \underline{\int}_D f + \underline{\int}_D g$

P3. Sea $A = [0,1] \times [0,1]$, y $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x+y}$.

(a) Prueba que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de A tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

donde $S(f,\cdot)$ y $s(f,\cdot)$ son las sumas superior e inferior respectivamente.

(b) Concluya que f es integrable y calcule $\int\limits_A f$.

P4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y denotemos $B_\epsilon = \overline{B}(\overline{x}, \epsilon)$. Pruebe que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V(B_\epsilon)} \int\limits_{B_\epsilon} f(x)\, dV = f(\overline{x})$$

donde $V(B_\epsilon)$ es el volumen de B_ϵ.

P5. Considere la siguiente región en $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$$

Demuestre que D es Jordan-medible y que la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

[Teorema de Fubini]

P6. Calcule

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x+z} dy\ dz\ dx$$

Calcúlela también en el orden $dy\ dx\ dz$

P7. Considere

$$I = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\ dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\ dxdy$$

(a) Calcule I directamente.

(b) Determine el conjunto en el que se está integrando.

(c) Calcule I invirtiendo el orden de integración.

P8. **(a)** Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)\ dt \right)\ dx\ = \int_0^1 tg(t)\ dt\ .$$

(b) Usando adecuadamente lo anterior, calcule la integral

$$\int_0^1 \int_w^1 (x - w) \sin(x^3)\ dx\ dw\ .$$

P9. **(a)** Definamos la región

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \leq z \leq 1 - y;\ 0 \leq x \leq y^2;\ y \geq 0\}.$$

Escriba la integral $I = \iiint\limits_D (x + y + z)\ dV$, como una integral iterada en el orden

$$I = \iiint\limits_D (x + y + z)\ dy\ dx\ dz,$$

con los límites de integración adecuados y luego evalúe la integral.

(b) Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ la región

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ z \geq 0;\ x + 2y + z \leq 1;\ y \geq |x|\}.$$

Calcule por integración el volumen de E, y encuentre además

$$\iiint\limits_E y\ dV.$$

P10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule las siguientes integrales iteradas y compruebe que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\ dy \right)\ dx\ \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\ dx \right)\ dy.$$

Responda si esto contradice el Teorema de Fubini. Justifique su respuesta.
Hint: *En caso de necesitarlo, use (sin demostrar) los siguientes resultados:*

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) = \frac{x^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}, \quad \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u)$$

P11. Calcule la integral

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\ dz\ dy\ dx.$$

[Cambio de Variables]

P12. Nuestro objetivo es calcular el valor de la integral

$$I = \iint_D \frac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx\ dy,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2 \geq 1;\ (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$.
Para ello, proceda como se detalla a continuación:

(a) Bosqueje la región de integración D.

(b) Haciendo uso de coordenadas polares, reescriba la región de integración en función de ρ y θ.

(c) Usando el Teorema de Cambio de Variables, calcule el valor de I.

P13. Se quiere encontrar el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R^2,$$

con $a, b, c > 0$. Para ello, considere $T(x,y,z) = (ax, by, cz)$ y estudie el conjunto $T(B(0,R))$, donde

$$B(0,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

.

P14. Calcule

$$\int_D e^{-x^2-y^2}\ dx\ dy$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$. Deduzca el valor de $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} 1dx$.

P15. Si R es la región $x^2+xy+y^2 \leq 1$, probar que

$$\int_R e^{x^2+xy+y^2}\ dx\ dy\ = \frac{2\pi(e-1)}{\sqrt{3}}.$$

Hint: *Sea $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ y considere un cambio de variables similar para y, con α escogido de manera conveniente.*

P16. Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2 \leq 1;\ \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq x\sqrt{3};\ x, y \geq 0\}$. Calcule

$$\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy.$$

P17. Sean $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, y

$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\}; \quad D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

(a) Encuentre $\iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\ dV$.

(b) Considere una variable adecuada de las coordenadas esféricas. Describa D_2 en éstas coordenadas y calcule el Jacobiano del cambio de variables.

(c) Encuentre $\iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\ dV$ y $\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\ dV$, con $D = D_1 \cup D_2$

P18. **(a)** Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(u,v) = (u+v, uv)$.

i) Verifique que T es inyectiva en $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ v \leq u\}$.

ii) Encuentre y bosqueje $D = T(\overline{D})$, donde

$$\overline{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq u \leq 1; \ 0 \leq v \leq u\}$$

iii) Calcular

$$\int\limits_D e^{x+\sqrt{x^2-4y}}\ dx\ dy$$

(b) Sea $R = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x, y \geq 0; \ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}\}$. Calcule

$$\int\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ dx\ dy.$$