Universidad de Chile
Facultad de Ciencias FÃÂsicas y MatemÃ¡ticas
Departamento de IngenierÃa MatemÃ¡tica
MA2001-4 CÃ¡lculo en Varias Variables
23 de Julio de 2013

Auxiliar #11: Integración

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Juan Pablo Donoso, Gianfranco Liberona, Valentina Toro.

P1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto acotado. Suponga además que D es Jordan-medible y que $\mathring{D} \neq \emptyset$:

(a) Demuestre que f es Riemman-integrable sobre ∂D y calcule el valor de su integral.

(b) Si además f es continua y D es cerrado, deduzca que f es Riemman-integrable sobre D y concluya que

$$\int\limits_{D} f = \int\limits_{\mathring{D}} f$$

Solución:

(a) Consideremos un rectángulo $\mathcal{R}_0$ que contenga a D (lo cual existe, ya que D es acotado). Como ∂D tiene medida nula (pues D es Jordan-medible), para todo $\varepsilon > 0$ existe un reticulado P de $\mathcal{R}_0$ tal que

$$\sum_{\substack{R \in P \\ \partial D \cap R \neq \emptyset}} V(R) \leq \varepsilon$$

Sabemos además que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$ para algún $M > 0$. Recordemos que para calcular la integral sobre regiones que no son rectangulares se definió, para cualquier región acotada B y un rectángulo R que la contiene:

$$\int\limits_{B} f := \int\limits_{R} f_B$$

Donde f_B es la función que coincide con f en B y es nula en cualquier otro lugar. En nuestro caso la integral sería

$$\int\limits_{\partial D} f = \int\limits_{\mathcal{R}_0} f_{\partial D}$$

Donde, más precisamente, $f_{\partial D}$ es la función definida por:

$$f_{\partial D} = \begin{cases} f(x) & x \in \partial D \\ 0 & x \notin \partial D \end{cases}$$

Con todo lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{\int\limits_{\partial D}} f &= \overline{\int\limits_{\mathcal{R}_0}} f_{\partial D} \\ &\leq S^P(f_{\partial D}) \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{R \in P \\ R \subset \mathring{D}}} M_R(f_{\partial D}) \cdot V(R)}_{=0} + \sum_{\substack{R \in P \\ \partial D \cap R \neq \emptyset}} M_R(f_{\partial D}) \cdot V(R) \\ &\leq \sum_{\substack{R \in P \\ \partial D \cap R \neq \emptyset}} V(R) \cdot M \\ &\leq M \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que $\overline{\int\limits_{\partial D)}} f = 0$. Análogamente se puede ver que $\underline{\int\limits_{\partial D}} f = 0$, y entonces como la integral superior e inferior de f sobre ∂D son iguales, la función es integrable en esa región y su valor es

$$\int\limits_{\partial D} f = 0$$

(b) Notemos que, en general, cuando una función f es continua sobre una región $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-medible, cerrada y acotada, podemos asegurar que la función f es integrable sobre D. De modo que nos encontramos en esa situación y el resultado es cierto. Por lo demás, al ser D cerrado, vemos que:

$$D = \partial D \cup \mathring{D} \ \wedge \ \partial D \cap \mathring{D} = \emptyset$$

De modo que:

$$\int\limits_{D} f = \int\limits_{\partial D} f + \int\limits_{\mathring{D}} f = \int\limits_{\partial D} f$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. El objetivo de este problema es demostrar el Teorema de Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

usando el Teorema de Fubini. Para ello, siga los pasos detallados a continuación:

(a) Defina la función

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

e intégrela sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ arbitrario.

(b) Justifique el hecho de que una función continua es nula si y sólo si su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula, y concluya el resultado buscado.

Solución:

(a) Calculemos directamente la integral indicada,

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \int\limits_c^d g(x, y) \ dydx &= \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \ dydx \\ &= \int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \ dydx - \int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \ dydx\end{aligned}$$

Calculamos cada integral por separado.
Primera integral: En virtud del Teorema de Fubini, esta integral equivale a

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \ dydx = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \ dxdy$$

y dado que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$, más el hecho de que al estar integrando con respecto a x, y es una constante por el momento, obtenemos que

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \ dx = \frac{\partial f}{\partial y}(b, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, y),$$

y análogamente, la integral exterior se obtiene como

$$\int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\right)\ dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(b,y)\ dy - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\ dy \quad = f(b,d) - f(b,c) - (f(a,d) - f(a,c)).$$

Segunda integral: Análogo al resultado anterior, notando que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$. Se obtiene

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\ dydx = f(b,d) - f(b,c) - (f(a,d) - f(a,c)).$$

Finalizados estos cálculos, obtenemos que

$$\int_a^b \int_c^d g(x,y)\ dydx = 0$$

(b) Es claro que si una función continua es nula, en particular integrará nulo sobre cualquier rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Si f es continua, y además es tal que su integral es nula en cualquier rectángulo, queremos probar que a f no le quedan más opciones que ser la función nula.
Razonando por contradicción, si esto no ocurriera, supongamos que hay un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) > 0$ (si el punto fuese tal que $f(x_0, y_0) < 0$, tomamos $-f$) . Luego, por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall (x,y) \in B((x_0, y_0), \delta),\ f(x,y) > 0.$$

Dado esto, basta considerar el rectángulo cuadrado, de diagonal 2δ (llamemosle $\mathcal{A}$), que queda estrictamente contenido en $B((x_0, y_0), \delta)$. Recordemos además que, si $g \leq h$ con h, g funciones integrables sobre una región $\mathcal{D}$, tenemos que:

$$\int_{\mathcal{D}} g \leq \int_{\mathcal{D}} h$$

En nuestro caso basta tomar la región rectangular $\mathcal{A}$, y considerar $g = 0$ y $h = f$ para concluir que:

$$\int_{\mathcal{A}} f > 0$$

Lo cual no puede ocurrir. Necesariamente entonces la función es la función nula.

De lo obtenido en la parte **(a)**, podemos concluir que $g(x,y) = 0$, para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pues dado que f es de clase C^2, nuestra función g es continua. Así,

$$g(x,y) = 0 \iff \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$

y se concluye lo que buscábamos demostrar.

P3. Definamos la región

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq 1 - y;\ 0 \leq x \leq y^2;\ y \geq 0\}$$

Escriba la integral $\iiint\limits_D (x+y+z)dV$, como una integral iterada en el orden

$$I = \iiint\limits_D (x+y+z)\ dy\ dx\ dz,$$

con los límites de integración adecuados y luego evalúe la integral.

Solución: Describamos la región en el orden que nos indican. Este orden viene dado por el orden en que se realiza la integración. Es decir, debemos considerar nuestra región D descrita de la siguiente manera: Primero determinamos el máximo intervalo en el que se mueve z, después, considerando que z ya esta dado, determinamos el máximo intervalo en el que se mueve x; finalmente, dados x y z, determinamos el máximo intervalo en el que se mueve y. Con esto en mente, notemos primero que z cumple que:

$$0 \leq z \leq 1$$

dado que el menor valor que puede tomar y es cero. Así, notemos que el máximo valor que puede alcanzar x dependerá del máximo valor que pueda alcanzar y, de forma que como, dado z, y cumple que:

$$y \leq 1 - z$$

Como $y \geq 0$, lo anterior implica que

$$y^2 \leq (1-z)^2$$

Pero como $x \leq y^2$, tenemos que el máximo intervalo en el que se mueve x dado z es

$$0 \leq x \leq (1-z)^2$$

finalmente, nos queda determinar el intervalo más gande que puede tomar y dado x y z, mirando las ecuaciones del enunciado notamos que

$$y^2 \geq x \geq 0 \ \wedge \ y \leq 1 - z$$

aplicando raíz en la primera desigualdad (lo que se puede, ya que nos encontramos en el dominio de la función raíz y además esta función es creciente), concluimos que:

$$\sqrt{x} \leq y \leq 1 - z$$

entonces, ya podemos escribir la integral con los límites de integración:

$$I = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{(1-z)} x + y + z \ dy \ dx \ dz$$

Calculemos entonces la primera integral respecto a y.

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{x}}^{(1-z)} x + y + z \ dy &= x\, y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=(1-z)} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=(1-z)} + z\, y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=(1-z)} \\
&= x(1 - z - \sqrt{x}) + \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{x}{2} + z(1 - z - \sqrt{x}) \\
&= (1-z)x - x^{3/2} + \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{x}{2} + z(1-z) - z\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Ahora integramos esta última expresión respecto a x:

$$\begin{aligned}
\int_0^{(1-z)^2} \% \ dx &= (1-z)\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=(1-z)^2} - \frac{2}{5}\,x^{5/2}\Big|_{x=0}^{x=(1-z)^2} + \frac{1}{2}(1-z)^4 - \frac{1}{4}\,x^2\Big|_{x=0}^{x=(1-z)^2} + z(1-z)^3 - \frac{2}{3}z\,x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=(1-z)^2} \\
&= \frac{1}{2}(1-z)^5 - \frac{2}{5}(1-z)^5 + \frac{1}{2}(1-z)^4 - \frac{1}{4}(1-z)^4 + z(1-z)^3 - \frac{2}{3}z(1-z)^3 \\
&= \frac{1}{10}(1-z)^5 + \frac{1}{4}(1-z)^4 + \frac{1}{3}z(1-z)^3
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos la última integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{10}(1-z)^5 + \frac{1}{4}(1-z)^4 + \frac{1}{3}z(1-z)^3 &= -\frac{1}{10}\,\frac{(1-z)^6}{6}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\,\frac{(1-z)^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{z(1-z)^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{20}\,(1-z)^5\Big|_0^1\right] \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

P4. Se define $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t g(x,y)\ dxdy,$$

donde $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Se pide calcular $f'(t)$. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre que para s fijo, la función

$$h(y) = \int_0^s g(x,y)\ dx$$

es continua.

(b) Defina la función $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(u,v) = \int_0^u \int_0^v g(x,y)\ dxdy,$$

y use Regla de la Cadena en forma adecuada para obtener la derivada pedida.

Solución:

(a) Veamos primero lo que debemos demostrar. Queremos ver que $h(\cdot)$ es continua en $[0,1]$. Sea entonces $z \in [0,1]$ fijo. Debemos probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall y \in [0,1],\ |y-z| \leq \delta \Longrightarrow |h(y) - h(z)| \leq \varepsilon$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ .Notemos que

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(z)| &= \left| \int_0^s g(x,y)\ dx \ - \int_0^s g(x,z)\ dx \right| \\
&= \left| \int_0^s g(x,y) - g(x,z)\ dx \right| \\
&\leq \int_0^s |g(x,y) - g(x,z)|\ dx
\end{aligned}$$

Entonces, lo que debemos buscar es una cota de la cantidad $|g(x,y) - g(x,z)|$ para todo x en $[0,s]$, considerando y tal que $|y-z| \leq \delta$, con delta a determinar.
Para esto último, consideremos el conjunto

$$D = [0,s] \times [0,1]$$

y consideremos g restringida a ese conjunto. Como g es continua en D, y D es compacto, entonces la función g es uniforme continua sobre D. Esto es

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall w_1, w_2 \in D,\ \|w_1 - w_2\|_\infty \leq \delta' \Longrightarrow |g(w_1) - g(w_2)| \leq \varepsilon'$$

Consideremos entonces $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{s}$ (son $s \neq 0$, el caso $s = 0$ h es la función nula), y sea δ' el asociado a el ε' que hemos escogido.
Así, tomando $\delta = \delta'$ tenemos que

$$\forall y,\ |y - z| \leq \delta \implies |g(x,y) - g(x,z)| \leq \frac{\varepsilon}{s}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}|h(y)-h(z)| &\leq \int\limits_0^s |g(x,y)-g(x,z)|\ dx\\ &\leq \int\limits_0^s \frac{\varepsilon}{s}\ dx\\ &= \cancel{s}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{s}}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que h es continua.

(b) Notamos que $f(t)=F(u(t),v(t))$ con $v(t)=u(t)=t$. Luego, por regla de la cadena tenemos que

$$f'(t)=\frac{\partial F}{\partial u}(t,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial t}(t)+\frac{\partial F}{\partial v}(t,t)\cdot\frac{\partial v}{\partial t}(t)$$

Calculamos primero $\frac{\partial F}{\partial u}$. Por lo demostrado en **(a)** la función dentro de la integral es continua (hipótesis necesaria para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo), tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\int_0^u \underbrace{\left(\int_0^v g(x,y)dx\right)}_{=h(y)} dy=\frac{\partial}{\partial u}\int_0^u h(y)dy=h(u)=\int_0^v g(x,u)dx$$

Para calcular $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$, vemos que por Teorema de Fubini se tiene que

$$F(u,v)=\int\limits_0^u\int\limits_0^v g(x,y)\ dx\ dy=\int\limits_0^v\int\limits_0^u g(x,y)\ dy\ dx$$

Luego, análogo a lo realizado anteriormente, se obtiene que

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)=\int\limits_0^u g(v,y)\ dy$$

Finalmente tenemos que

$$f'(t)=\frac{\partial F}{\partial u}(t,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial t}(t)+\frac{\partial F}{\partial v}(t,t)\cdot\frac{\partial v}{\partial t}(t)=\int\limits_0^t g(x,t)\ dx\ +\int\limits_0^t g(t,y)\ dy$$