Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
23 de Julio de 2013

Auxiliar #11: Integración

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Juan Pablo Donoso, Gianfranco Liberona, Valentina Toro.

P1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto acotado. Suponga además que D es Jordan-medible y que $\mathring{D} \neq \emptyset$:

(a) Demuestre que f es Riemman-integrable sobre ∂D y calcule el valor de su integral.

(b) Si además f es continua y D es cerrado, deduzca que f es Riemman-integrable sobre D y concluya que

$$\int_D f = \int_{\mathring{D}} f$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. El objetivo de este problema es demostrar el Teorema de Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

usando el Teorema de Fubini. Para ello, siga los pasos detallados a continuación:

(a) Defina la función

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

e intégrela sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ arbitrario.

(b) Justifique el hecho de que una función continua es nula si y sólo si su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula, y concluya el resultado buscado.

P3. Definamos la región

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 1 - y; \ 0 \leq x \leq y^2; \ y \geq 0\}$$

Escriba la integral $\iiint\limits_D (x+y+z)dV$, como una integral iterada en el orden

$$I = \iiint\limits_D (x+y+z) \ dy \ dx \ dz,$$

con los límites de integración adecuados y luego evalúe la integral.

P4. Se define $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t g(x,y) \ dx dy,$$

donde $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Se pide calcular $f'(t)$. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre que para s fijo, la función

$$h(y) = \int_0^s g(x,y) \ dx$$

es continua.

(b) Defina la función $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t,s) = \int_0^t \int_0^s g(x,y)\ dxdy,$$

y use Regla de la Cadena en forma adecuada para obtener la derivada pedida.