Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001 - Cálculo en Varias Variables
14 de junio de 2013

Guía de Problemas: Diferenciabilidad

Profesores: Rafael Correa, Jorge San Martín.
Auxiliares: Diego Gramusset, Camila Romero, David Salas.

Derivadas parciales y diferencial.

P1. Sean E, E_1, E_2 y F espacios de Banach, $f : E_1 \times E_2 \to F$ una función bilineal continua y $U \subseteq E$ un abierto. Sean además $u : U \to E_1$ y $v : U \to E_2$ funciones continuas. Definiremos la "multiplicación" de u y v como $w : U \to F$ dada por $w(x) = f(u(x), v(x))$. Muestre que si u y v son diferenciables en un punto $x_0 \in U$, entonces w también lo es, y que el diferencial de w en x_0 está dado por

$$Dw(x_0)h = f\left(Du(x_0)h, v(x_0)\right) + f\left(u(x_0), Dv(x_0)h\right), \qquad \forall h \in E.$$

P2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo no vacío y acotado, y sea $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ el espacio de las funciones continuas de $\overline{\Omega}$ a $\mathbb{R}$. Sea $\varphi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de clase $\mathcal{C}^1$ y definamos $f : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ dada por

$$f(u)(x) = \varphi(x, u(x)).$$

Muestre que f es diferenciable y que para todo $u, v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$Df(u)v : \ x \mapsto D_2\varphi(x, u(x)) \cdot v(x).$$

Teorema del Valor Medio.

P1. Sea $F \in \mathcal{C}^1((0,1); \mathbb{R}^2)$ tal que $F(0) = 0$ y $F'(0) \neq 0$. Pruebe que existe $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\|F(t)\|$ es una función creciente de t en $(0, \epsilon)$.

Regla de la cadena y diferenciales parciales.

P1. Sea $f(u,v)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ dada y sea $g(x,y)$ una función definida por $g(x,y) = f(ax+by, cx+dy)$ donde a, b, c, d son constantes.

(a) Encuentre las derivadas parciales $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(b) Supongamos que f satisface

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$$

Encuentre a, b, c, d tales que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$$

Las constantes no son necesariamente únicas.

P2. (a) Considere la transformaciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ dadas por:

$$\eta(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) \quad \wedge \quad \xi(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)$$

Dada una función $v \in \mathcal{C}^2$ definamos: $u(x,y) = v(\eta(x,y), \xi(x,y))$.
Demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}$$

(b) Usando la parte anterior demuestre que si $u(x,y)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

entonces u es de la forma $u(x,y) = f(\eta(x,y)) + g(\xi(x,y))$ para ciertas funciones f y g.

(c) Encuentre la función $u(x,y)$ tal que u satisface la ecuación anterior y además

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$$

P3. [P1 Control 2 CVV-Correa, Otoño 2012]

(a) Obtener la fórmula del diferencial del producto de dos funciones diferenciables $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ usando regla de la cadena. Para ésto, defina $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $q : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tales que

$$p(u,v) = u \cdot v \quad \wedge \quad q(x) = (f(x), g(x))$$

y note que $f(x) \cdot g(x) = (p \circ q)(x)$

(b) Dada la función composición $\Theta : \mathcal{L}(E,E) \times \mathcal{L}(E,E) \to \mathcal{L}(E,E)$ definida por $\Theta(U,V) = U \circ V$. Calcule $D\Theta(U,V)(H_1,H_2)$.
HINT: Utilice la fórmula de diferenciales parciales

$$D(U,V)(H1,H2) = D_1(U,V)(H1) + D_2(U,V)(H2)$$

En particular, $D_1(U,V)(H1)$ es el diferencial de la función que a cada U le asigna $\Theta(U,V)$ con V constante.
Es útil verificar la linealidad (y continuidad) de los diferenciales parciales .

(c) Dada las aplicaciones diferenciables $A, B : E \to \mathcal{L}(E,E)$ se define $f : E \to \mathcal{L}(E,E)$ por

$$f(x) = A(x) \circ B(x)$$

Calcule $Df(x)(h)$.
HINT: Componga Θ de la parte anterior con la función $(A,B) : E \to \mathcal{L}(E,E) \times \mathcal{L}(E,E)$ donde $(A,B)(x) = (A(x), B(x))$ y utilice la regla de la cadena

- ## Teorema de la función inversa y de la función implícita.

P1. Sea E es espacio vectorial de las funciones $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tales que $y(0) = y(1) = 0$. Se define la función

$$\begin{aligned} [\,\cdot\,] : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x'(0)| + \|x''\|_\infty. \end{aligned}$$

(a) Muestre que $[\,\cdot\,]$ es norma sobre E, que $\|\cdot\|_\infty \leq [\,\cdot\,]$ y que $(E, [\,\cdot\,])$ es espacio de Banach.

(b) Muestre que la aplicación

$$\begin{aligned} f : (E, [\,\cdot\,]) &\to (\mathcal{C}_0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\ y &\mapsto -y'' + y^3 \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ y calcule su diferencial.

(c) Muestre que $Df(0)$ es biyectiva y concluya que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{C}_0([0,1])$ con $\|g\|_\infty < \varepsilon$ existe $x \in E$ que verifica que

$$-x'' + x^3 = g.$$

P2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $g : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dos aplicaciones de clase $\mathcal{C}^1$. Considere la aplicación $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = g(x)(f(y)) + f(x).$$

Suponga que $0 \in \Omega$ y $f(0) = 0$. Diga una condición para f y g tal que garantice que existan vecindades abiertas U, V de 0 contenidas en Ω y una aplicación $\varphi : U \to V$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que para todo $(x, y) \in U \times V$,

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = y,$$

y dado esto, calcule $D\varphi$ en U.

- ## Derivadas parciales de orden superior y desarrollos limitados.

P1. **[P2 Control CVV-Jofré, Otoño 2009]**

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$, se define el Laplaciano de f como $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Si hacemos el cambio de variables (coordenadas polares) $x = rcos(\theta), y = rsen(\theta)$ y definimos $g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$. Demuestre que la fórmula del Laplaciano en coordenadas polares es $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$

(b) Sea $F : \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$, definida por $F(x, y) = cos(xy) - x^4y^4$.

i) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno el punto $(0, 0)$.

ii) Encontrar una vecindad en torno a $(0, 0)$ tal que el error sea menor que 10^{14}.
HINT: La fórmula del resto para un polinomio de Taylor de orden 2 centrado en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ de una función de clase $\mathcal{C}^3$ esta dada por:

$$R_2(x_0, h) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0 + t_{ijk}h)h_ih_jh_k \text{ con } t_{ijk} \in [0, 1]$$

P2. Sea $f(x, y) = e^x + \sin(x + y) + y^3$.

(a) Encuentre el polinomio de Taylor $P2(x, y)$ de orden 2 de f entorno al punto $(1, 0)$.

(b) Encuentre una constante C tal que para $(x - 1)^2 + y \leq 1$ se tenga

$$\|f(x, y) - P2(x, y)\| \leq C\|(x - 1, y)\|^3$$

- ## Criterios de Optimalidad y Lagrange.

P1. Encuentre los puntos en que las funciones alcanzan sus máximos y mínimos (globales).

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

P2. **[P3 Control CVV-Leseigneur]**
Encuentre el máximo de la integral

$$J(x, y) = \int_x^y \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt$$

sujeto a la restricción $y - x = c$ donde $c \neq 0$ es una constante.

P3. Sean $a, b, c > 0$ demostrar

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a + b + c}{5}\right)^5$$

HINT: Considere $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ para $x, y, z > 0$