Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001 - Cálculo en Varias Variables
10 de junio de 2013

Clase Auxiliar 10: Teorema de la función Implícita y Teorema de Lagrange

Profesores: Rafael Correa, Jorge San Martín.
Auxiliares: Diego Gramusset, Camila Romero, David Salas.

P1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones de cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} e^z + xy^2 + w &= 2 \\ \operatorname{sen}(z) + x^2y + w^3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el sistema presentado define a z y w como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad en torno a $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 2, 0, 1)$.

(b) Sean $z(x, y)$ y $w(x, y)$ las funciones cuya existencia se demostró en las partes anteriores. Obtenga el valor de las siguientes expresiones:

$$z(0,2), \quad w(0,2), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,2), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,2), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,2), \quad \frac{\partial w}{\partial y}(0,2).$$

P2. Considere $\mathcal{C}[0,1]$ dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $X = \mathcal{C}^2[0,1]$ dotado de la norma $\|\cdot\|_X$ dada por

$$\|x\|_X = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty.$$

Para $f \in \mathcal{C}[0,1]$ fijo, muestre que existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ que contiene al 0 y tal que para todo $\varepsilon \in I$, la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x''(t) + x^2(t) &= \varepsilon f(t), \quad \forall t \in [0,1] \\ x(0) = x(1) &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución.

P3. Considere $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma euclidiana. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica (i.e. $A = A^t$) y considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^tAx. \end{aligned}$$

(a) Muestre que $\nabla f(x) = 2Ax$.

(b) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$. Muestre que $x_0 \in S$ es punto crítico de f restringida a S si y sólo si x_0 es vector propio normalizado de A.

(c) Suponga ahora que A es definida positiva (i.e. $x^tAx > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Sea $z \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Determine los puntos críticos de la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle z, x \rangle \end{aligned}$$

restringido al conjunto $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = 1\}$.