Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001 - Cálculo en Varias Variables
03 de junio de 2013

Clase Auxiliar 9: Regla de la cadena y teorema de la función inversa

Profesores: Rafael Correa, Jorge San Martín.
Auxiliares: Diego Gramusset, Camila Romero, David Salas.

P1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por:

$$g(u,v) = f(\operatorname{sen}(v) + \cos(u), \operatorname{sen}(u) + \cos(v), e^{u-v}).$$

(a) Muestre que g es de clase $\mathcal{C}^1$.

(b) Usando la fórmula del diferencial de la composición de dos funciones y sabiendo que la matriz asociada a $Df(1,1,1)$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

calcule la matriz asociada a $Dg\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

P2. Considere el espacio vectorial $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ dotado de la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la función

$$\begin{aligned} G : E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b (\varphi \circ f)(x)dx. \end{aligned}$$

Muestre que G es diferenciable en todo E y que para todo punto $f \in E$, se tiene que

$$\forall h \in E,\ DG(f)h = \int_a^b (\varphi' \circ f)(x) \cdot h(x)dx.$$

P3. **Definición 1 (Conjunto conexo)** *Sea E un e.v.n. y $U \subseteq E$. U se dice conexo si para todo par de abiertos O_1, O_2 de E tales que $U \subseteq O_1 \cup O_2$ y que $U \cap O_1$ y $U \cap O_2$ son no-vacios, entonces se tiene que $O_1 \cap O_2$ es no-vacío.*

Sea E un e.v.n., $U \subseteq E$ un abierto conexo y $f : E \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $Df(u) = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que f es constante en U.

P4. Considere c_{00} el espacio de las sucesiones finitas (i.e. $x = (x_n)$ tales que $x_n = 0$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$). Muestre que la función

$$\begin{aligned} T : c_{00} &\to c_{00} \\ x = (x_n) &\mapsto T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right) \end{aligned}$$

es lineal, continua y biyectiva, pero que su inversa T^{-1} **no es continua**.

P5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Muestre que f no es inyectiva.

(b) Pruebe que para todo $(x,y) \neq (0,0)$ f es localmente invertible.

(c) Calcule aproximiadamente el valor de $f^{-1}(-3{,}01, 3{,}98)$, con f^{-1} la inversa en torno a $(1,2)$.