MA2001-1-Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Carlos Román, Rodolfo Núñez

Auxiliar 6

03 de mayo de 2013

P1. Suponga que $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, es una función de clase C^1 tal que para cierta constante M

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq M, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demuestre que f es Lipschitz en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es decir, existe C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

P2. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $f''(x_0)$ es invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f^a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.
Indicación: Considere la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(a, x) := \nabla f(x) + a\nabla g(x).$$

P3. Considere la transformación

$$F(x, y) = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}, -y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

definida en $A = \{(x, y)|x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$. Demuestre que F^{-1} está definida en torno a $(0, 1)$ y encuentre la derivada de F^{-1} en este punto.

P4. Sea $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre un polinomio en dos variables, $T(x, y)$, tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{x^4 + y^4} = 0.$$