MA2001-1-Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Carlos Román, Rodolfo Núñez

Auxiliar 4

16 de abril de 2013

P1. Se define la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ a un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ como

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|y - x\|.$$

Demuestre que $\mathrm{Adh}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_A(x) = 0\}$.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = ax^2y + by^2x + cz^2x$.

(a) Encuentre la aproximación afín de f en el punto $(1, 1, 1)$.

(b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie

$$S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = a + b + c\}$$

en el punto (1,1,1).

(c) Encuentre valores de a, b, c tales que $\nabla f(1, 1, 1)$ sea paralelo al vector $e = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 5, 0)$ y la derivada direccional de f en el punto $(1, 1, 1)$ en la dirección e sea igual a 13.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(-1/|x|+|y|)}{|x|+|y|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x, y)$ es una función continua.

(b) ¿Es $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} = +\infty$?

(c) Demuestre que la función f alcanza su mínimo.

P4. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \ell & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Determine ℓ de modo que f sea continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Calcule, si existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(d) Determine en qué puntos son continuas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.