Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
7 de Agosto, 2013

Auxiliar #MA1102-2 Álgebra Lineal. : Pauta P2 f y g Auxiliar Examen

Profesor: Jaime Gonzalez
Auxiliar: Martín Castillo

P2: Sean $1 \leq k < n$ naturales y $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $r(M) = k$.

a) Verifique que para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^t(M^tM)x = \|Mx\|^2$ y concluya que M^tM es definida positiva. Definimos $P = M(M^tM)^{-1}M^t$.

b) Muestre que P es simétrica.

c) Muestre que $P^2 = P$.

d) Muestre que $PM = M$.

e) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ perpendicular a todas las columnas de M se tiene que $Px = 0$.

f) Sea V el s.e.v de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de M. Muestre que V y $V^\perp$ son los subespacios propios de P y deduzca que los valores propios de P son exactamente los números 0 y 1.

g) Muestre que $tr(P) = r(P) = k$

Dem f): Como $r(M) = k$ entonces M tiene solamente k columnas linealmente independientes(l.i.). Entonces:

$$V = \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle$$

Donde los v_i son columnas de la matriz M. Además escribamos M en función de sus columnas (v_i):

$$M = [v_1| \dots |v_n]$$

Luego usando la propiedad d) veamos que:

$$PM = M \Leftrightarrow P[v_1| \dots |v_n] = [v_1| \dots |v_n]$$

Y observando que por propiedades de la multiplicación de matrices $P[v_1| \dots |v_n] = [Pv_1| \dots |Pv_n]$. Entonces:

$$[Pv_1| \dots |Pv_n] = [v_1| \dots |v_n] \Longleftrightarrow Pv_i = 1v_i,\ \forall i = 1, ..., n$$

Entonces $\lambda = 1$ es un valor propio de P con todas las columnas de M (los v_i) siendo vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$, y por lo tanto todas las combinaciones lineales de v_i también son vectores propios asociados a $\lambda = 1$. Por lo que podemos decir que $V = \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle \subseteq W_1$, con W_1 el sub espacio de todos los vectores propios asociados a $\lambda = 1$.

Por otro lado observemos que si $x \in V^\perp$ entonces x seria perpendicular (ortogonal) a todas las columnas de M (pues V es el espacio generado por ellas). Así por e):

$$Px = 0 = 0x, \forall x \in V^\perp.$$

Entonces $\lambda = 0$ es un valor propio con todos los elementos de $V^\perp$ como vectores propios asociados. Por lo que podemos decir que $V^\perp \subseteq W_0$, con W_0 el sub espacio de todos los vectores propios asociados a $\lambda = 0$.

Luego sabiendo que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$ y que dim(V)= k entonces dim($V^\perp$)= $n - k$. Y sabiendo que dim(W_1)+dim(W_0)$\leq$ n (pues la suma de las dimensiones de todos los sub espacios propios es igual a la dimension del espacio), notando que $V \subseteq W_1 \Rightarrow dim(V) \leq dim(W_1)$ y $V^\perp \subseteq W_0 \Rightarrow dim(V^\perp) \leq dim(W_0)$. Obtenemos que:

$$k \leq dim(W_1)$$

$$n-k \leq dim(W_0)$$

$$dim(W_1)+dim(W_0) \leq n$$

$$\Longrightarrow k = dim(W_1),\ n-k = dim(W_0) \Longrightarrow V = W_1,\ V^{\perp} = W_0$$

Esto demuestra que V y $V^{\perp}$ son subespacios propios de P y además observemos que si λ es un valor propio de P entonces por la propiedad c) tendríamos que:

$$P^2x = Px \Leftrightarrow P\lambda x = \lambda Px = \lambda x \Leftrightarrow \lambda^2 x = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda^2-\lambda)x = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } 1$$

Así 0 y 1 son sus únicos valores propios y W_1 y W_0 son sus únicos sub espacios propios (de P).

Dem g): Acá notemos que como P es simétrica entonces es diagonalizable y en este caso se cumple que:

$$tr(P) = tr(D)$$

$$r(P) = r(D)$$

Donde D es la matriz diagonal asociada. Luego como sabemos que los valores propios de P son solo 0 y 1 y sabemos que la multiplicidad de $\lambda = 1$ es k y de $\lambda = 0$ es $n-k$ sabemos que en la matriz diagonal D se repite k-veces el 1 en su diagonal y $(n-k)$-veces el 0. Luego claramente

$$tr(D) = r(D) = k \Longrightarrow tr(P) = r(P) = k$$

.