Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
19 de Abril, 2013

Auxiliar #5MA1102-2 Álgebra Lineal. : Producto Cruz, Norma y Espacios Vectoriales sobre $\mathbb{R}$

Profesor: Jaime Gonzalez
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sean los planos:

$$L_1:\ \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ \lambda,t\in\mathbb{R}$$
$$L_2:\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix},\ \lambda,t\in\mathbb{R}$$

Ocupe el producto cruz para encontrar los vectores perpendiculares a L_1 y L_2 respectivamente y con estos determine si los planos son paralelos.

P2. Ocupando las propiedades básicas de la norma euclidiana demuestre que:

a) $0\leq ||x||,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$

b) $||\overline{x}||=1$, si $\overline{x}=\frac{x}{||x||}$ con $x\neq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$.

c) $||\sum_{i=1}^{k} x_i||\leq\sum_{i=1}^{k}||x_i||$, donde $x_i\in\mathbb{R}^n,\ \forall\ i=1,...,k$, con $k\in\mathbb{N}$.

d) $||x||\leq||x-y||+||y||$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$.

e) $|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$.

P3. Sea $C([a,b])$ el conjunto de todas las funciones continuas con dominio en $[a,b]$ y recorrido en $\mathbb{R}$. Muestre que $C([a,b])$ es un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y ponderación usual de funciones y escalares.

P4. Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ que son acotadas. En $\mathbb{S}$ definimos el producto por escalar usando la siguiente notación: si $a=(a_0,a_1,...,a_k,...)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces $\lambda a=(\lambda a_0,\lambda a_1,...,\lambda a_k,...)\in\mathbb{S}$. Muestre que $\mathbb{S}$ es un espacio vectorial y que el conjunto $\mathbb{O}=\{a\in\mathbb{S}|\ a_k+ka_{k+1}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}\}$ es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{S}$.

P5. Sea $P(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en los números reales. Muestre que $P(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial y que $P_n(\mathbb{R})$ (el conjunto de todos los polinomios de grado igual a n, con $n\in\mathbb{N}$) no es un sub espacio vectorial de $P(\mathbb{R})$.

Propuesto: Para cada conjunto indique si sus elementos son linealmente independientes o linealmente dependientes:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}\right\}$

c) $\{e^x,e^{-x},senh(x)\}$

d) $\{1+x^2,x-1,x^2-x\}$

Propiedad: La norma euclidiana cumple con las siguientes propiedades

(i) $x = 0 \iff ||x|| = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Definición: Dado un Grupo Abeliano $(V, +)$ y el Cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con una ley de composición externa(osea que $\lambda v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$). Diremos que V es un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{R}$ si y solo si la ley de composicion externa satisface $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$:

(1) $(a + b)x = ax + bx$

(2) $a(x + y) = ax + ay$

(3) $a(bx) = (ab)x$

(4) $1x = x$

Definición: Sea V un Espacio Vectorial sobre el Cuerpo $\mathbb{R}$. Diremos que $U \neq \phi$, $U \subseteq V$ es un Sub-Espacio Vectorial de V si y solo si:

(1) $x + y \in U$, $\forall x, y \in U$

(2) $\lambda x \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$

Definición: Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ Espacio Vectorial. Diremos que estos vectores son Linealmente Dependientes(l.d.) si y solo si existen numeros reales $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ con alguno distinto de 0, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$