MA1101-5 - Introducción al Álgebra Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Simón Piga

Auxiliar 12
Polinomios

P1. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que si $r \in \mathbb{R}$ es raíz, entonces tiene multiplicidad par.

b) Demuestre que existen dos polinomios de coeficientes en $\mathbb{R}$ tales que $p(x) = q_1^2(x) + q_2^2(x)$

P2. a) Encuentre a, b tales que $1 + i$ sea raíz del polinomio $x^5 + ax^3 + b$.

b) Encuentre todas las raíces del polinomio:

$$x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 - 13x - 9$$

Indicación: i es raíz.

P3. Sea $a \in \mathbb{R}$ se define $\phi_a : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, el funcional de evaluación de a como:

$$\phi_a(p(x)) = p(a) \qquad \forall p(x) \in \mathbb{R}[x]$$

a) Demuestre que ϕ es un morfismo sobreyectivo de anillos entre $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

b) Demuestre que $\phi_a^{-1}(\{0\}) = \{(x - a)q(x) \mid\ q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$