MA1101-5 - Introducción al Álgebra Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Simón Piga

Auxiliar 11
Números $\mathbb{C}$omplejos y Morfismos

P1. Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquiera.

a) Encuentre las raíces n-ésimas de z.

b) Tome de las raíces antes calculadas la que corresponde a $k = 0$ y calcule su raíz n-ésima.

c) Prosigua de la misma forma para encontrar un caso general. Estudie la disposición geométrica de esos puntos en el plano Complejo.

P2. a) Calcule la parte real e imaginaria del siguiente número complejo:

$$(-1 + i\sqrt{3})^{3n} + (-1 - i\sqrt{3})^{3n}$$

b) Considere el grupo $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$ con la multiplicación compleja $(\cdot)$.
Demuestre que $(U(\mathbb{Z}[i]), \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +_4)$
(o sea que $U(\mathbb{Z}[i])$ con la **multiplicación** es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ con la **Suma** en módulo 4)

P3. a) Sean $\{z_0, z_1, z_2 ... z_n\}$ números complejos de módulo uno ($|z_k| = 1,\ \forall k \in \{1...n\}$) y tales que:

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = a \in \mathbb{R}$$

Entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z_k} = a$

b) Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$ donde los z_k son las n raíces n-ésimas de un mismo número complejo z.

P4. Considere el grupo $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ con la multiplicación $\cdot$

a) Demuestre que si ω es una ráiz n-ésima de la unidad, demuestre que
$f : (\mathbb{Z}_n, +_n) \longrightarrow (S_1, \cdot)$ definida como $f(k) = \omega^k$ es un morfismo.

b) Recíprocamente: demuestre que si $\phi : (\mathbb{Z}_n, +_n) \longrightarrow (S_1, \cdot)$ es un morfimo, entonces existe ω, raíz n-ésima de la unidad, tal que $\phi(k) = \omega^k \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.