Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería matemática
MA1101 Introducción al Álgebra

Súper Guía de Problemas Preparación Control 6

Auxiliares: Bruno Aguiló, Ivana Bachmann, Felipe Garrido, Simón Piga, Benjamín Ruiz

MORFISMOS

P1. Sea $g \in H$ con $(H, *)$ grupo. Se define el *grupo cíclico generado por g* como

$G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ donde $g^0 = 1$ (neutro en H), $g^n = \overbrace{g * g * ... * g}^{n\ veces}$ si $n > 0$ y $g^n = \overbrace{g^{-1} * g^{-1} * ... * g^{-1}}^{|n|\ veces}$ si $n < 0$.

Se tienen dos casos: Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_0} = 1$, entonces G, el grupo cíclico generado por g, será finito, y se dirá que G es un grupo cíclico finito.

Por otro lado, si $\forall n \in \mathbb{N}, g^n \neq 1$, entonces G será infinito, y se dirá que es un grupo cíclico infinito.

La idea de este problema es demostrar que, salvo isomorfismos, $\mathbb{Z}$ es el único grupo cíclico infinito, es decir, si H es un grupo cíclico infinito, entonces H y $\mathbb{Z}$ deben ser isomorfos.

Sea entonces G un grupo cíclico infinito generado por un elemento g y consideremos $\mathbb{Z}$ con la suma. Sea además $\phi : \mathbb{Z} \to G$ una función definida por $\phi(n) = g^n$. Demuestra que ϕ es un isomorfismo.

P2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sea $g \in G$. Se define $\phi_g : G \to G$ por $\phi_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}, \forall x \in G$. Demuestra que ϕ_g es un isomorfismo.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e, finito.

Para $h \in G$ cualquiera, prueba que $f : \mathbb{N} \to G$, definida por $f(n) = h^n$, no es inyectiva. Concluye que $\exists m > 0$ tal que $h^m = e$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica, para cada $x \in \mathbb{R}$, que $(f \circ f)(x) = x + 1$.

(a) Prueba que f es una función biyectiva.

(b) Prueba que f no es un morfismo de $(\mathbb{R}, +)$.

P5. Sea $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ un morfismo tal que $f(1) \in \mathbb{Z}$.

(a) Prueba por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.

(b) Deduce del punto anterior que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.

(c) Sea $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Prueba por inducción que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q})$.

(d) Deduce del punto anterior que $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q})$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

(e) Prueba que para todo $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = f(1)x$.

P6. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y sean f, $g : U \to U$ tales que $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = iz$.

Para cualquier función $h : U \to U$ se define $h^0 = id_U$ y $h^n = \overbrace{h \circ ... \circ h}^{n \text{ veces}}$ si $n = 1, 2, ...$ Si además h es biyectiva se define $h^n = (h^{-1})^{|n|}$ si $n = -1, -2, ...$, y se tiene (no lo pruebe) que $h^n \circ h^m = h^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y que $(\{h^p : p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es grupo.

(a) Verifica que f y g son biyectivas y que $g \circ f \neq f \circ g$. Prueba además que si $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$g^p(z) = i^p z,$$

$$f^p = \begin{cases} id_U & \text{si p es par} \\ f & \text{si p es impar} \end{cases}$$

(b) Demuestra que $(\{f^p : U \to U : p \in \mathbb{Z}, \circ\}$ es isomorfo a $(\{-1, 1\}, *)$ donde $*$ es la multiplicacón usual de $\mathbb{R}$.

NÚMEROS COMPLEJOS

P1. (C5-2102) Demuestra que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq -1$ y $|z| = 1$, se tiene que

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = z.$$

P2. (C6-2012) Encuentra la parte real e imaginaria de

$$(-1 + i\sqrt{3})^{3n} + (-1 - i\sqrt{3})^{3n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

P3. (C6-2012) Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $w \neq 1$. Prueba que

$$(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$$

P4. (C6-2008) Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Pruebe que, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

P5. (C6-2008) Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}.$$

P6. (C6-2009) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ con $Im(z) > 0$. Demuestra que

$$Im\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0.$$

P7. (C6-2009) Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestra (sin usar inducción) que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \phi \in \mathbb{R})$ con $\phi \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{(\cot(\phi) + z_1 - 1)^n - (\cot(\phi) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \operatorname{sen}(n\phi)\operatorname{cosec}^n(\phi)$$

P8. (C6-2010) Considera los complejos $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentra el menor $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $z^n = w^n = 1$.

P9. (C6-2010) En el esquema de la figura, los puntos P, A, B y C están en una horizontal. Considera los complejos $z_A = OA$, $z_B = OB$ y $z_c = OC$ (O el origen).

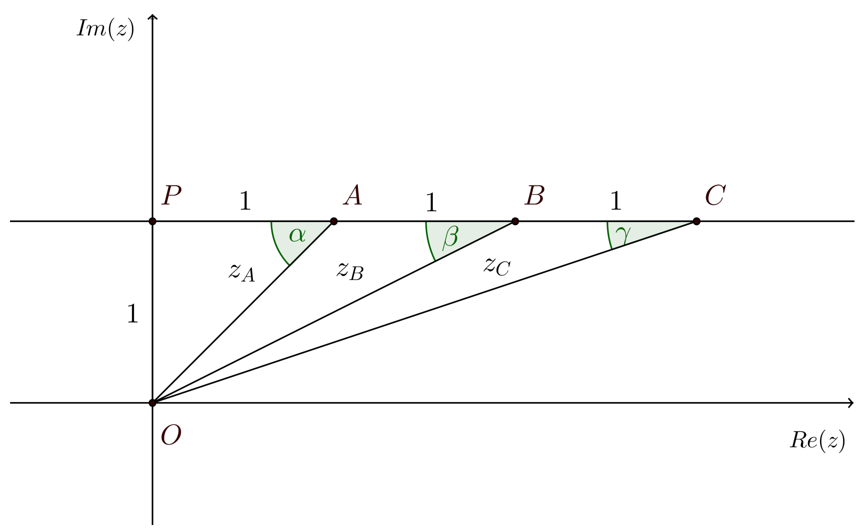

Figura 1: Plano Complejo

(a) Escribe los complejos z_A, z_B y z_C en forma cartesiana y en forma polar, y en este último caso, en función de los ángulos α, β y γ (sin calcularlos).

(b) Usando álgebra de números complejos, prueba que α, β, y γ satisfacen la relación $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$

P10. (C6-2011) Sea $z \in C$ tal que $|z| = 1$ y $z^{2n} \neq -1$. Demuestra que

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} \in \mathbb{R}$$

P11. (C6-2011) Sea a_1, a_2, b_1 y $b_2 \in \mathbb{N}$. Se define $s_1 = a_1^2 + b_1^2$ y $s_2 = a_2^2 + b_2^2$. Demuestra que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$s_1 s_2 = m^2 + n^2$$

Indicación: Defina $z_1 = a_1 + ib_1$.

P12. (C6-2011) Escribe en forma cartesiana y polar el complejo

$$\frac{z_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)}{z_2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)}$$

Donde $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$, $arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ y $arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$

P13. (C6-2011) Sean $z_0, ..., z_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de la unidad, ordenadas de manera usual (es decir, según argumento creciente). Demuestra que:

$$z_0 z_1 + z_1 z_2 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} + z_{n-1} z_0 = 0$$

P14. (C7-2007) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios tales que:

$$z_1 + z_2 = -u, \quad u \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = v, \quad v \in \mathbb{C}$$

(a) Prueba que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

(b) Prueba que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

(c) Prueba que $u = \overline{u} \cdot v$.

(d) Si los ángulos de la forma polar de u y de v, son φ y θ respectivamente, es decir

$$u = |u|e^{i\varphi} \text{ y } v = |v|e^{i\theta}$$

utilice **(c)** para probar que $\theta = 2\varphi + 2k\pi, \ k \in Z$.

P15. (C7-2007) Demuestra que las raíces de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

P16. (C7-2007) Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado y $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z (con $n \geq 2$). Calcula:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$

P17. Sean $w_0, ..., w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad. Prueba que $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_j^k = 0.$$

P18. Prueba que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

P19. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Prueba que

$$\tfrac{1}{1+z^n} + \tfrac{1}{1+\bar{z}^n}$$

es un número real.

P20. Expresa en la forma $a+bi$ las raíces cuartas del complejo $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ (es decir, resuelve $z^4 = z_0$).

P21. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces prueba que $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

P22. Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|\frac{z-2}{z-1}| = 2$, es una circunferencia en el plano complejo. Determina su radio y centro.

P23. Sean $z_1, z_2, ..., z_p$ complejos tales que $|z_i| = 1$, $\forall i \in \{1, 2, ..., p\}$. Demuestra que si $\sum\limits_{i=1}^{p} z_i = a \in \mathbb{R}$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a$.

P24. Demuestre que si z es raíz n-ésima de la unidad $(n \geq 2)$ y n es divisor de m, entonces z es raíz m-ésima de la unidad.

(Hint: Recuerda que $n \in \mathbb{N}$ es divisor de $m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $m = kn$).

P25. Sean $z_n = x_n + iy_n = (1+i\sqrt{3})^{3n}$. Encuentra la forma polar de z_n y pruebe que la parte real de z_n, es decir, x_n, verifica $x_n + 8x_{n-1} = 0$.

P26. Sean $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.

(a) Demuestra que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}(z_k - z) = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$.

(b) Concluye que $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - z)$.

P27. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Prueba que z es raíz cúbica de la unidad.

P28. Prueba que el producto de la raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

NÚMEROS COMPLEJOS Y MORFISMOS

P1. Se define el conjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- **(a)** Prueba que $(S_1, *)$, donde $*$ es la multiplicación de números complejos, es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$.
- **(b)** Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad. Prueba que la función $f : \mathbb{Z}_3 \to S_1$ definida en cada $a \in \mathbb{Z}_3$ como $f(a) = w^a$ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(S_1, *)$.

  Recuerde que $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y que $+_3$ es la suma módulo 3 en $\mathbb{Z}_3$.
- **(c)** Prueba que si $g : (\mathbb{Z}_3, +_3) \to (S_1, *)$ es un homomorfismo, entonces existe una raíz cúbica de la unidad $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(a) = w^a$ en todo $a \in \mathbb{Z}_3$.