MA1101-5 - Introducción al Álgebra Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Simón Piga

Auxiliar 10
Anillos

P1. Se le llama **Enteros Gaussianos** al conjunto:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$$

Donde i es un elemento tal que $i^2 = -1$.

En los enteros gaussianos se define la suma y la multiplicacin de la forma usual. Demuestre que $\mathbb{Z}[i]$ es un anillo con unidad y sin divisores de 0. Explique además por que 2 no resulta ser un número primo en $\mathbb{Z}[i]$.

P2. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se definen:

$$U(A) = \{a \in A \mid \exists b \in A; a \cdot b = 1\}$$
$$Z(A) = \{a \in A \mid a \cdot b = b \cdot a \ , \forall b \in A\}$$

a) $(U(A), \cdot)$ es grupo.

b) $(Z(A), +, \cdot)$ es subanillo de $(A, +, \cdot)$

c) Encuentre $U(A)$ para: $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}_8, \mathbb{Q}$

P3. Sea A un anillo con unidad booleano, es decir, tal que:

$$a^2 = a \ , \forall a \in A$$

a) Demuestre que cada elemento es su propio inverso aditivo.

b) Demuestre que A es abeliano.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo:

a) Demuestre que si $a \in A$ es divisor de cero, entonces no es invertible.

b) Si $a \in A$ es divisor de cero, y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es divisor de cero.

c) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor de cero, entonces alguno de ellos es divisor de cero.