MA1101-5 - Introducción al Álgebra Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Simón Piga

Pauta Auxiliar 10
P2, P3, P4

P2. a) Debemos entender a $U(A)$ como el conjunto de elementos invertibles. Para demostrar que $(U(A), \cdot)$ es grupo debemos demostrar primero que es cerrado para la operación, pero es directo:

Sean $a, b \in U(A)$ entonces: $\exists a^{-1}, b^{-1}$ inversos de a y b respectivamente. Además, claramente, $a^{-1}, b^{-1} \in U(A)$, pues tienen inversos. Luego, $b^{-1}a^{-1}ab = 1$, por lo tanto $b^{-1}a^{-1}$ es el inverso de ab. Por lo tanto $ab \in U(A)$.

Como ya sabemos que la operación $\cdot$ es asociativa, solo nos falta probar que cumple dos propiedades, que se deducen fácilmente.

ii Tiene un Neutro:
En efecto 1 es invertible, por lo que $1 \in U(A)$.

iii Cada elemento tiene un inverso: Claramente, si $a \in U(A) \Rightarrow a^{-1} \in U(A)$

Luego $(A, \cdot)$ es grupo.

b) Para probar que $Z(A), +, \cdot)$ es sub anillo debemos probar primero que $(Z(A), +) \leq (A, +)$.
Claramente $1 \in Z(A)$, por lo que $Z(A) \neq \emptyset$.
Además, sean $a, b \in Z(A)$ y sea $x \in A$:

$$\begin{aligned}(a-b)x =& ax - bx \\ =& xa - xb && \text{pues } a, b \in Z(A) \\ =& x(a-b)\end{aligned}$$

Por lo tanto $(a-b)$ conmuta con todo elemento de A, y por lo tanto, $(a-b) \in Z(A)$, y por la caracterización de subgrupo, $(Z(A), +) \leq (A, +)$.
Las propiedades de la operación $\cdot$ se heredan de A. Solo falta probar que $Z(A)$ es cerrado para la multiplicación.
Sean $a, b \in Z(A)$, claramente, $\forall x \in A, abx = axb = xab$ por lo que $ab \in Z(A)$.

P3. a) Sea $a \in A$ cualquiera:

$$\begin{aligned} & (a+a) = (a+a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a \qquad / - a - a \\ \Rightarrow \quad & 0 = a + a \end{aligned}$$

Luego: $a = -a$

b) Sean $a, b \in A$ Queremos probar que $ab = ba$:

$$a + b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b \qquad / - a - b$$
$$\Rightarrow \quad 0 = ab + ba \Rightarrow ab = -ba = ba \qquad \text{por lo visto en la parte (a)}$$

Luego, el anillo A es conmutativo.

P4. a) Sea $a \in A$ un divisor de cero. Es decir, existe $b \in A$ tal que: $ab = 0$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Supongamos que $ax = 1$ para cierto x (es decir, supongamos que a es invertible). Luego:

$$axb = b \Rightarrow abx = b \Rightarrow 0 = b$$

. Lo cual es una contradicción, pues $b \neq 0$.

b) Sean $a, b \in A$ con a divisor de cero, y tales que $ab \neq 0$. Sabemos que existe $x \in A$ tal que $ax = 0$ con $x \neq 0$.
Luego:

$$abx = axb = 0 \cdot b = 0$$

y como $x \neq 0$, ab es divisor de cero.

c) Sean $a, b \in A$ tales que, existe $x \in A, x \neq 0$ tal que $abx = 0$. Queremos probar que a es dibisor de 0 ó b es divisor de 0.

Supongamos que b no es divisor de cero, por lo que $bx \neq 0$. Pero $abx = 0$. por lo tanto a es divisor de cero (donde el otro divisor de cero sería bx, que es distinto de cero). Luego, si uno no es divisor de cero, entonces el otro s lo es. Por lo tanto, a o b es divisor de cero.